

Activité de découverte

Comment coder un nombre avec seulement deux symboles ?

NSI – Première

Un ordinateur ne sait manipuler que deux états (courant / pas de courant, aimantation dans un sens / dans l'autre, ...), que l'on note conventionnellement par les chiffres **0** et **1**. Peut-on malgré tout écrire **n'importe quel** nombre entier avec seulement ces deux chiffres ? C'est ce que cette activité vous propose de découvrir par vous-mêmes, **avant** que la méthode ne soit formalisée en cours. Aucune connaissance particulière n'est nécessaire : uniquement du calcul mental et de l'observation.

1 Le jeu de la balance

Activité : La balance aux quatre poids

On dispose de **quatre poids**, en un seul exemplaire chacun : un poids de **1 kg**, un de **2 kg**, un de **4 kg** et un de **8 kg**. On peut poser sur le plateau de la balance n'importe quelle combinaison de ces poids (aucun, un seul, plusieurs, ou tous), mais toujours du **même côté** : on ne soustrait jamais.

1. Sans les poids de 4 kg et 8 kg, quelles masses peut-on obtenir avec seulement les poids de 1 kg et 2 kg ?
2. En utilisant les quatre poids, essayez d'obtenir chacune des masses de 0 à 15 kg. Pour chaque masse, complétez une ligne du tableau ci-dessous en indiquant par un **1** les poids utilisés et par un **0** les poids non utilisés.

Masse à obtenir	poids 8	poids 4	poids 2	poids 1
0 kg				
1 kg				
2 kg				
3 kg				
4 kg				
5 kg				
6 kg				
7 kg				
8 kg				
9 kg				
10 kg				
11 kg				
12 kg				
13 kg				
14 kg				
15 kg				

3. Y a-t-il des masses de 0 à 15 kg qu'il est **impossible** d'obtenir ? Pour une masse donnée, avez-vous trouvé **plusieurs** façons différentes de l'obtenir, ou une seule ?
4. Quelle est la masse maximale que l'on peut obtenir avec ces quatre poids ? Comparez

ce nombre à 2^4 .

5. On souhaite pouvoir peser toutes les masses entières de 0 à 100 kg. Quel est le plus petit poids (parmi 16 kg, 32 kg, 64 kg, ...) qu'il faut ajouter à la collection pour y parvenir ? Combien de poids possède-t-on alors au total ?

Correction de l'exercice 1

1. Avec 1 kg et 2 kg seuls, on obtient : 0 kg (rien), 1 kg, 2 kg et 3 kg (1+2). On ne peut pas obtenir 2,5 kg ni aucune masse au-delà de 3 kg.
2. Tableau complet :

Masse	8	4	2	1
0 kg	0	0	0	0
1 kg	0	0	0	1
2 kg	0	0	1	0
3 kg	0	0	1	1
4 kg	0	1	0	0
5 kg	0	1	0	1
6 kg	0	1	1	0
7 kg	0	1	1	1
8 kg	1	0	0	0
9 kg	1	0	0	1
10 kg	1	0	1	0
11 kg	1	0	1	1
12 kg	1	1	0	0
13 kg	1	1	0	1
14 kg	1	1	1	0
15 kg	1	1	1	1

3. Aucune masse de 0 à 15 kg n'est impossible à obtenir : toutes sont atteignables. Pour chaque masse, il n'existe qu'une seule façon de l'obtenir avec ces quatre poids (une seule ligne possible dans le tableau) : c'est ce qu'on appelle l'**unicité** de la décomposition.
4. La masse maximale est $8 + 4 + 2 + 1 = 15$ kg, et l'on remarque que $15 = 2^4 - 1$.
5. Avec 1, 2, 4, 8, 16 kg, la masse maximale est 31 kg, ce qui ne suffit pas. Il faut ajouter le poids de **64 kg** (le poids de 32 kg ne suffirait pas non plus : $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63 < 100$, alors que $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127 \geq 100$). On possède alors **7 poids** au total (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64).

2 Ce que révèle ce tableau

Activité : Formaliser l'observation

1. Dans votre tableau, lisez chaque ligne de gauche (poids 8) à droite (poids 1) comme un mot de quatre chiffres 0 et 1. Comparez cette écriture à l'écriture décimale habituelle des nombres (unités, dizaines, centaines, ...) : quel est le point commun entre les deux systèmes ? Quelle est la différence ?
2. À votre avis, comment pourrait-on appeler cette façon d'écrire les nombres avec uniquement des 0 et des 1 ?
3. Sans utiliser la balance, proposez une méthode générale permettant de trouver, pour n'importe quel nombre entier, son écriture en 0 et en 1.

Correction de l'exercice 2

1. Dans les deux systèmes, chaque position correspond à une puissance d'un nombre fixe (10 en décimal, 2 ici), et ces puissances sont **décroissantes** de gauche à droite. La différence est que le système décimal utilise dix chiffres possibles à chaque position (de 0 à 9), alors que celui-ci n'en utilise que deux (0 et 1).
2. On peut l'appeler « écriture binaire » (*bi* pour deux), puisqu'elle repose sur deux symboles seulement – les élèves proposent souvent ce mot ou une variante proche, et c'est bien celui utilisé en informatique.
3. Une méthode possible : pour un nombre n donné, chercher la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à n ; noter un 1 à cette position, soustraire cette puissance de 2 à n , et recommencer avec le reste jusqu'à atteindre 0 (en notant un 0 aux positions non utilisées). C'est exactement la méthode que vous avez appliquée avec les poids, sans les poids !

Remarque : Ce qu'il faut retenir de cette activité

Vous venez de redécouvrir, à l'aide de poids, le principe de l'**écriture binaire** des entiers naturels : chaque nombre s'écrit de façon **unique** comme une suite de 0 et de 1, chacun étant associé à une puissance de 2, exactement comme en décimal chaque chiffre est associé à une puissance de 10. C'est précisément ce résultat que le cours va maintenant formaliser et généraliser (y compris à la base 16).