

Probabilités conditionnelles et indépendance

Mathématiques – Première (enseignement scientifique)

Croiser deux caractères, conditionner, répéter des épreuves

Table des matières

1 Croiser deux caractères	2
1.1 Tableau croisé d'effectifs	2
1.2 Fréquences marginales et conditionnelles	2
2 Probabilité conditionnelle	3
2.1 Définition	3
2.2 Propriétés	4
3 Arbre pondéré	5
4 Indépendance de deux évènements	7
4.1 Définition et caractérisation	7
5 Répétition d'épreuves identiques et indépendantes	9
5.1 Épreuve de Bernoulli	9
5.2 Calculer avec un arbre	10

Introduction

En classe de seconde, vous avez appris à calculer la probabilité d'un évènement dans une situation où toutes les issues sont connues d'avance. Mais la plupart des questions intéressantes portent sur une information *partielle* : sachant que ce patient a un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ? Sachant que cet élève habite loin du lycée, quelle est la probabilité qu'il vienne en bus ?

Toutes ces questions ont la même structure : on dispose d'une information supplémentaire, qui **réduit la population de référence**, et on recalcule une probabilité dans ce nouveau cadre. C'est la notion de **probabilité conditionnelle**, qui est le cœur de cette séquence.

Nous verrons ensuite qu'il arrive que l'information supplémentaire ne change rien du tout à la probabilité : on dira alors que les deux évènements sont **indépendants**. Cette notion, apparemment anodine, est ce qui permet de modéliser la répétition d'une même expérience – lancers de dé, tirs au but, contrôle qualité – et de calculer des probabilités sur plusieurs épreuves à la suite.

Remarque : Un chapitre où l'intuition trompe

Les probabilités conditionnelles sont l'un des rares chapitres où l'intuition se trompe très souvent, y compris chez des adultes formés. L'exemple des *faux positifs* étudié en section 3 en est l'illustration la plus spectaculaire : un test fiable à 99 % peut parfaitement se tromper dans 98 % des cas où il annonce un résultat positif. Prenez l'habitude de *calculer* plutôt que de deviner.

1 Croiser deux caractères

Lorsqu'on interroge une population, on relève souvent **deux caractères** pour chaque individu (par exemple : le lieu d'habitation *et* le mode de déplacement). On cherche alors à savoir si ces deux caractères sont liés.

1.1 Tableau croisé d'effectifs

Définition 1.1: Tableau croisé d'effectifs

Un **tableau croisé d'effectifs** présente la répartition d'une population selon deux caractères simultanément : chaque case contient le nombre d'individus vérifiant à la fois la modalité de sa ligne et celle de sa colonne. La dernière ligne et la dernière colonne, appelées **marges**, contiennent les totaux.

Exemple 1.2: Deux caractères croisés

On interroge 200 élèves de première d'un lycée sur leur lieu d'habitation et leur mode de déplacement.

	À pied ou vélo	Bus ou car	Voiture	Total
Ville	66	36	18	120
Hors ville	8	56	16	80
Total	74	92	34	200

La case 56 se lit : 56 élèves habitent hors de la ville *et* viennent en bus ou en car.

1.2 Fréquences marginales et conditionnelles

Définition 1.3: Fréquence marginale, fréquence conditionnelle

Dans un tableau croisé d'effectif total N :

- une **fréquence marginale** est une fréquence calculée sur l'ensemble de la population : c'est le quotient d'un total de ligne ou de colonne par N ;
- une **fréquence conditionnelle** est une fréquence calculée à l'intérieur d'une seule ligne (ou d'une seule colonne) : la population de référence n'est plus la population entière, mais cette ligne (ou cette colonne).

Méthode 1.4: Lire un tableau croisé

La seule question à se poser est : *quel est le « tout » auquel je compare ?*

- « Quelle proportion **des élèves** vient en bus ? » $\Rightarrow$ on divise par le total général : $\frac{92}{200} = 0,46$. C'est une fréquence **marginale**.
- « Quelle proportion **des élèves habitant hors de la ville** vient en bus ? » $\Rightarrow$ on divise par le total de la ligne : $\frac{56}{80} = 0,70$. C'est une fréquence **conditionnelle**.

Exemple 1.5: Comparer deux profils

Reprenons le tableau de l'exemple 1.2. Calculons, pour chaque lieu d'habitation, les fréquences conditionnelles des trois modes de déplacement :

	À pied ou vélo	Bus ou car	Voiture	Total
Ville	$\frac{66}{120} = 0,55$	$\frac{36}{120} = 0,30$	$\frac{18}{120} = 0,15$	1
Hors ville	$\frac{8}{80} = 0,10$	$\frac{56}{80} = 0,70$	$\frac{16}{80} = 0,20$	1

Les deux profils sont très différents : 55 % des élèves habitant en ville viennent à pied ou à vélo, contre seulement 10 % de ceux qui habitent hors de la ville. Le lieu d'habitation et le mode de déplacement sont donc clairement **liés**.

Remarque : Représenter et filtrer avec un tableur

Un tableau croisé se construit très bien à partir d'un fichier de données, à l'aide d'un tableur :

- la fonction `NB.SI.ENS` compte les individus vérifiant plusieurs conditions à la fois (un filtre **ET**) ;
- un **diagramme en barres** permet de comparer deux profils de fréquences conditionnelles, un **diagramme circulaire** de représenter la répartition à l'intérieur d'une seule sous-population (chaque fréquence est convertie en angle en la multipliant par 360°) ;
- les filtres **ET**, **OU**, **NON** permettent d'isoler un sous-ensemble d'individus. Attention au **OU** : les individus vérifiant les deux conditions ne doivent être comptés qu'une seule fois.

Exercice 1.6: Lecture d'un tableau croisé

Les 500 élèves de première d'un lycée se répartissent ainsi :

	Filles	Garçons	Total
Externes	70	110	180
Demi-pensionnaires	180	120	300
Internes	10	10	20
Total	260	240	500

1. Calculer la fréquence marginale des externes.
2. Calculer la fréquence des filles parmi les externes, puis la fréquence des externes parmi les filles. Pourquoi ces deux nombres sont-ils différents ?

Correction

1. $\frac{180}{500} = 0,36$: 36 % des élèves de première sont externes.
2. Filles parmi les externes : $\frac{70}{180} = \frac{7}{18} \approx 0,39$. Externes parmi les filles : $\frac{70}{260} = \frac{7}{26} \approx 0,27$.
Le numérateur est le même (70 élèves qui sont à la fois filles et externes), mais la population de référence change : les 180 externes dans un cas, les 260 filles dans l'autre. Ces deux fréquences conditionnelles répondent à deux questions différentes et n'ont aucune raison d'être égales.

2 Probabilité conditionnelle

2.1 Définition

Si l'on choisit au hasard un individu de la population, chaque individu ayant la même probabilité d'être choisi, alors toute fréquence lue dans le tableau est une probabilité. Une fréquence conditionnelle devient alors une *probabilité conditionnelle*.

Définition 2.1: Probabilité conditionnelle

Soient A et B deux évènements, avec $P(A) \neq 0$. On appelle **probabilité de B sachant A** la probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé. Elle est notée $P_A(B)$ et définie par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Remarque : Comment lire la notation

Dans $P_A(B)$, l'évènement écrit **en indice** est celui que l'on *sait déjà* réalisé : c'est la nouvelle population de référence. L'évènement entre parenthèses est celui dont on cherche la probabilité. Conditionner, c'est « zoomer » sur une partie de l'univers.

Exemple 2.2: Un roi sachant un pique

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Soit A l'évènement « la carte est un pique » et B l'évènement « la carte est un roi ». Alors $A \cap B$ est l'évènement « la carte est le roi de pique ».

$$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{32}, \quad \text{donc} \quad P_A(B) = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{32} \times 4 = \frac{1}{8}.$$

On retrouve le résultat intuitif : sachant que la carte est un pique, il reste 8 cartes possibles, dont un seul roi.

2.2 Propriétés**Propriété 2.3: Règles de calcul**

Soient A et B deux évènements avec $P(A) \neq 0$. Une probabilité conditionnelle est une probabilité : elle en suit toutes les règles. En particulier

- $0 \leq P_A(B) \leq 1$;
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$;
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Démonstration. La troisième égalité s'obtient en multipliant les deux membres de la définition par $P(A)$, ce qui est licite car $P(A) \neq 0$. Les deux premières traduisent le fait que, l'ensemble des issues étant restreint à celles qui réalisent A , on travaille dans un nouvel univers où les règles habituelles s'appliquent. $\square$

Méthode 2.4: Distinguer les trois écritures

C'est l'erreur la plus fréquente du chapitre. Sur une population de 200 élèves dont 80 habitent hors de la ville, et parmi lesquels 56 viennent en bus (notons H et B ces deux évènements) :

- $P(H \cap B) = \frac{56}{200} = 0,28$: la proportion, *parmi tous les élèves*, de ceux qui cumulent les deux caractères ;
- $P_H(B) = \frac{56}{80} = 0,70$: la proportion *parmi les élèves habitant hors de la ville* ;
- $P_B(H) = \frac{56}{92} \approx 0,61$: la proportion *parmi les élèves venant en bus*.

Même numérateur, trois dénominateurs différents, trois questions différentes.

Exercice 2.5: Trois probabilités à ne pas confondre

Dans un club sportif de 150 adhérents, 90 sont des femmes, et 36 des adhérents sont des femmes pratiquant le tennis. On note F l'évènement « l'adhérent est une femme » et T « l'adhérent pratique le tennis ». On choisit un adhérent au hasard.

1. Calculer $P(F)$ et $P(F \cap T)$.
2. En déduire $P_F(T)$ et interpréter le résultat par une phrase.

Correction

1. $P(F) = \frac{90}{150} = 0,6$ et $P(F \cap T) = \frac{36}{150} = 0,24$.
2. $P_F(T) = \frac{P(F \cap T)}{P(F)} = \frac{0,24}{0,6} = 0,4$. Parmi les femmes du club, 40 % pratiquent le tennis.
(Ce qui se retrouve directement : $\frac{36}{90} = 0,4$.)

3 Arbre pondéré

Un tableau croisé suppose que l'on connaisse les effectifs. Très souvent, l'énoncé donne à la place des *pourcentages conditionnels* (« parmi les hommes, 63 % sont cadres »). L'outil adapté est alors l'**arbre pondéré**.

Définition 3.1: Arbre pondéré

Un **arbre pondéré** (ou arbre de probabilité) représente une expérience aléatoire en plusieurs étapes. Chaque branche porte une probabilité : celle du premier niveau est une probabilité simple, celles des niveaux suivants sont des probabilités **conditionnelles**, sachant le chemin déjà parcouru. L'extrémité d'un chemin s'appelle une **feuille**.

Propriété 3.2: Les trois règles de l'arbre

- R1.** La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- R2.** La probabilité d'une feuille est le **produit** des probabilités rencontrées le long du chemin qui y mène.
- R3.** La probabilité d'un évènement correspondant à plusieurs feuilles est la **somme** des probabilités de ces feuilles.

Remarque : D'où viennent ces règles

La règle R2 n'est rien d'autre que la formule $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ de la propriété 2.3, lue de gauche à droite le long du chemin. La règle R3 porte le nom de **formule des probabilités totales**.

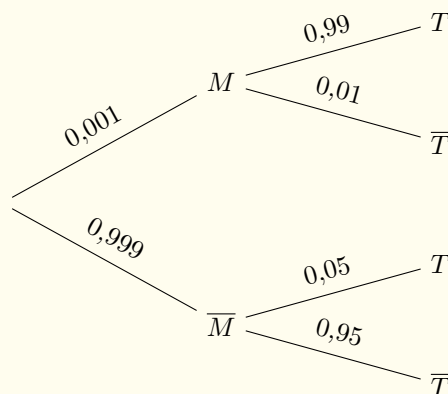
Méthode 3.3: Construire et exploiter un arbre

1. Repérer l'évènement dont on connaît la probabilité *sans condition* : il occupe le **premier niveau** de l'arbre.
2. Placer au deuxième niveau les évènements dont l'énoncé donne les probabilités *conditionnelles* (repérables aux expressions « parmi les... », « si..., alors... », « sachant que... »).
3. Compléter les branches manquantes par R1 (le contraire).
4. Multiplier le long des chemins (R2), additionner entre les chemins (R3).

Exemple 3.4: Un test de dépistage

Une maladie touche une personne sur mille. Un test de dépistage détecte un malade avec une probabilité de 0,99, et déclare négatif un individu sain avec une probabilité de 0,95. On note M l'évènement « la personne est malade » et T « le test est positif ».

L'énoncé donne $P(M) = 0,001$, puis deux probabilités conditionnelles : $P_M(T) = 0,99$ et $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,95$, d'où $P_{\overline{M}}(T) = 0,05$ par R1.



Probabilité d'être testé positif (règle R3, deux feuilles concernées) :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,001 \times 0,99 + 0,999 \times 0,05 = 0,00099 + 0,04995 = 0,05094.$$

Probabilité d'être malade sachant que le test est positif :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,00099}{0,05094} \approx 0,019.$$

Autrement dit, environ 98 % des personnes déclarées positives ne sont pas malades ! La maladie est si rare que les 5 % d'erreurs commises sur l'immense population des personnes saines sont bien plus nombreuses que les vrais malades détectés. Le test reste utile : il fait passer la probabilité d'être malade de 0,001 à 0,019, soit environ 20 fois plus, ce qui permet de cibler un second examen plus fiable.

Remarque : $P_M(T)$ et $P_T(M)$ n'ont rien à voir

Dans l'exemple précédent, $P_M(T) = 0,99$ (le test détecte presque tous les malades) alors que $P_T(M) \approx 0,019$ (presque aucun positif n'est malade). Inverser le conditionnement change complètement le résultat : c'est l'erreur de raisonnement la plus coûteuse du chapitre.

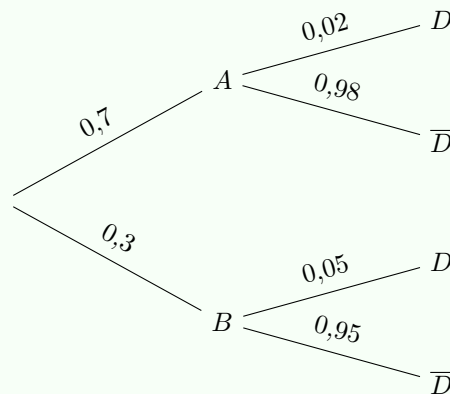
Exercice 3.5: Deux ateliers

Une usine fabrique des pièces dans deux ateliers. L'atelier A produit 70 % des pièces, l'atelier B le reste. Parmi les pièces de l'atelier A, 2 % sont défectueuses ; parmi celles de l'atelier B, 5 % le sont. On prélève une pièce au hasard dans la production.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que la pièce soit défectueuse.
3. La pièce prélevée est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'atelier B ?

Correction

1. On note A et B les évènements « la pièce vient de l'atelier A » et « de l'atelier B », et D « la pièce est défectueuse ».



2. Deux feuilles mènent à une pièce défectueuse :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0,7 \times 0,02 + 0,3 \times 0,05 = 0,014 + 0,015 = 0,029.$$

Il y a 2,9 % de pièces défectueuses dans la production.

3. On cherche $P_D(B)$:

$$P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0,015}{0,029} \approx 0,517.$$

Bien que l'atelier B ne produise que 30 % des pièces, il est responsable de plus de la moitié des pièces défectueuses.

4 Indépendance de deux évènements

4.1 Définition et caractérisation

Dans les exemples précédents, l'information apportée par le conditionnement modifiait la probabilité. Il arrive qu'elle ne la modifie pas du tout.

Définition 4.1: Évènements indépendants

Deux évènements A et B , de probabilités non nulles, sont **indépendants** lorsque

$$P_B(A) = P(A),$$

c'est-à-dire lorsque savoir que B est réalisé ne change pas la probabilité de A .

Propriété 4.2: Caractérisation par le produit

Deux évènements A et B de probabilités non nulles sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Dans ce cas, on a aussi $P_A(B) = P(B)$: l'indépendance est une relation **symétrique**.

Démonstration. Comme $P(B) \neq 0$, on peut écrire $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Alors

$$P_B(A) = P(A) \iff \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Cette dernière égalité étant symétrique en A et B , elle équivaut de la même façon à $P_A(B) = P(B)$. $\square$

Méthode 4.3: Tester l'indépendance

C'est la caractérisation par le produit que l'on utilise en pratique, car elle ne demande aucune division :

1. calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$;
2. comparer $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$;
3. conclure : égalité $\Rightarrow$ indépendants ; sinon, non indépendants.

Exemple 4.4: Deux évènements indépendants, deux qui ne le sont pas

On lance un dé équilibré à six faces.

a) A : « le résultat est pair » et B : « le résultat est un multiple de 3 ». Alors $A = \{2; 4; 6\}$, $B = \{3; 6\}$ et $A \cap B = \{6\}$:

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}.$$

Les évènements sont **indépendants**.

b) A : « le résultat est pair » et C : « le résultat est inférieur ou égal à 3 ». Alors $A \cap C = \{2\}$:

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap C) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4}.$$

Les évènements ne sont **pas indépendants**.

Remarque : Indépendants n'est pas incompatible

Ne pas confondre deux notions très différentes :

- A et B sont **incompatibles** lorsque $A \cap B = \emptyset$: ils ne peuvent pas se produire en même temps, donc $P(A \cap B) = 0$;
- A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$: la réalisation de l'un ne renseigne pas sur l'autre.

Deux évènements incompatibles de probabilités non nulles ne sont *jamais* indépendants : savoir que A est réalisé garantit au contraire que B ne l'est pas.

Remarque : Une hypothèse de modélisation

L'indépendance est parfois une propriété que l'on *vérifie* par le calcul (comme dans l'exemple ci-dessus), et parfois une hypothèse que l'on *pose* pour construire un modèle : on admet que deux lancers de dé successifs, ou deux prélèvements dans une très grande production, n'ont aucune influence l'un sur l'autre. C'est ce second usage qui permet toute la section suivante.

Exercice 4.5: Indépendance et effectif total

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard. Soit A : « le numéro est pair » et B : « le numéro est un multiple de 3 ».

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules, numérotées de 1 à 13. Commenter.

Correction

1. Il y a 6 numéros pairs, 4 multiples de 3 et 2 numéros à la fois pairs et multiples de 3 (6 et 12) :

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} = P(A) \times P(B).$$

Les événements sont **indépendants**.

2. Avec 13 boules, les effectifs des événements ne changent pas, mais le total si :

$$P(A) = \frac{6}{13}, \quad P(B) = \frac{4}{13}, \quad P(A) \times P(B) = \frac{24}{169} \neq \frac{2}{13} = \frac{26}{169} = P(A \cap B).$$

Ils ne sont **pas indépendants**. Une seule boule ajoutée suffit à détruire l'indépendance : celle-ci n'est pas une propriété « intuitive » des événements, mais une égalité numérique qui doit toujours être vérifiée par le calcul.

5 Répétition d'épreuves identiques et indépendantes**5.1 Épreuve de Bernoulli****Définition 5.1: Épreuve de Bernoulli**

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles : l'une appelée **succès**, de probabilité p , l'autre appelée **échec**, de probabilité $1 - p$.

Exemple 5.2: Trois épreuves de Bernoulli

- Lancer une pièce et regarder si l'on obtient pile ($p = 0,5$).
- Prélever une pièce dans une production dont 5 % sont défectueuses, le succès étant « la pièce est défectueuse » ($p = 0,05$).
- Tenter un lancer franc au basket, réussi dans 80 % des cas ($p = 0,8$).

Le mot « succès » ne signifie pas que l'issue est souhaitable : c'est simplement celle dont on compte les apparitions.

Définition 5.3: Répétition d'épreuves identiques et indépendantes

On répète n fois la même épreuve de Bernoulli, de paramètre p , dans des conditions **identiques** (le paramètre p ne change pas d'une épreuve à l'autre) et **indépendantes** (le résultat d'une épreuve n'influence pas les suivantes). On note alors X le **nombre de succès** obtenus au cours des n épreuves.

5.2 Calculer avec un arbre

Propriété 5.4: Probabilité d'un chemin

Dans l'arbre représentant n épreuves identiques et indépendantes, toutes les branches « succès » portent la même probabilité p et toutes les branches « échec » la même probabilité $1 - p$. La probabilité d'un chemin comportant k succès (et donc $n - k$ échecs) vaut

$$p^k \times (1 - p)^{n-k},$$

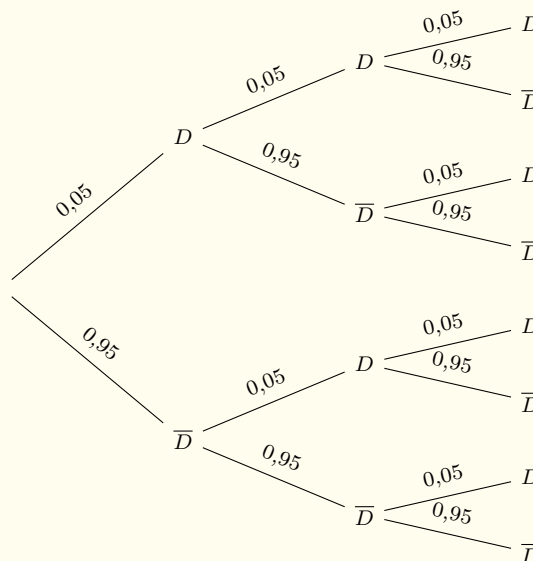
et cette valeur ne dépend pas de l'ordre dans lequel les succès apparaissent.

Méthode 5.5: Calculer $P(X = k)$ pour $n \leq 4$

1. Dessiner l'arbre des n épreuves (au plus 4 niveaux).
2. Calculer la probabilité d'un chemin comportant k succès : $p^k(1 - p)^{n-k}$.
3. **Compter** sur l'arbre le nombre de chemins comportant exactement k succès.
4. Multiplier : $P(X = k) = (\text{nombre de chemins}) \times p^k(1 - p)^{n-k}$.

Exemple 5.6: Trois prélèvements

Une machine produit des pièces dont 5 % sont défectueuses. On prélève 3 pièces au hasard dans une production très nombreuse : les prélèvements peuvent être considérés comme identiques et indépendants. Le succès est « la pièce est défectueuse », $p = 0,05$ et $n = 3$. On note X le nombre de pièces défectueuses.



Aucune pièce défectueuse ($k = 0$) : un seul chemin,

$$P(X = 0) = 0,95^3 \approx 0,857.$$

Exactement une pièce défectueuse ($k = 1$) : trois chemins (la pièce défectueuse peut être la première, la deuxième ou la troisième), chacun de probabilité $0,05 \times 0,95^2$:

$$P(X = 1) = 3 \times 0,05 \times 0,95^2 \approx 0,135.$$

Propriété 5.7: Loi de probabilité de X

La **loi de probabilité** de X est le tableau donnant $P(X = k)$ pour toutes les valeurs possibles de k , c'est-à-dire $k = 0, 1, \dots, n$. La somme de la dernière ligne vaut toujours 1, puisque ces valeurs épuisent tous les cas possibles.

Méthode 5.8: « Au moins un succès »

L'évènement « obtenir au moins un succès » est le contraire de « n'obtenir aucun succès », qui ne correspond qu'à un seul chemin. On calcule donc toujours

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^n,$$

plutôt que d'additionner tous les autres cas.

Exercice 5.9: Quatre lancers francs

Une joueuse de basket réussit 80 % de ses lancers francs. Elle tente 4 lancers francs, supposés identiques et indépendants. On note X le nombre de lancers réussis.

1. Calculer $P(X = 4)$, puis $P(X = 0)$.
2. En déduire la probabilité qu'elle réussisse au moins un lancer.
3. Calculer $P(X = 3)$ et comparer avec $P(X = 4)$. Commenter.

Correction

Le succès est « le lancer est réussi », $p = 0,8$, l'échec a pour probabilité 0,2, et $n = 4$.

1. Un seul chemin comporte quatre succès : $P(X = 4) = 0,8^4 = 0,4096$. Un seul chemin n'en comporte aucun : $P(X = 0) = 0,2^4 = 0,0016$.
2. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,0016 = 0,9984$.
3. Quatre chemins comportent exactement trois succès (le lancer manqué peut être le 1^{er}, le 2^e, le 3^e ou le 4^e), chacun de probabilité $0,8^3 \times 0,2$:

$$P(X = 3) = 4 \times 0,8^3 \times 0,2 = 0,4096 = P(X = 4).$$

Réussir exactement trois lancers sur quatre est donc aussi probable que les réussir tous les quatre : le chemin « tout réussir » est le plus probable pris isolément, mais il est unique, alors que quatre chemins différents donnent trois réussites. Tout l'enjeu du calcul est là : *probabilité d'un chemin $\times$ nombre de chemins*.

Bilan

Dans cette séquence, nous avons appris à :

- lire un **tableau croisé d'effectifs**, y calculer des **fréquences marginales** et **conditionnelles**, et comparer deux profils pour détecter un lien entre deux caractères ;
- calculer une **probabilité conditionnelle** $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, et distinguer $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$;
- construire un **arbre pondéré** et l'exploiter : multiplier le long d'un chemin, additionner entre les chemins (**formule des probabilités totales**) ;
- reconnaître et justifier l'**indépendance** de deux évènements, par l'égalité $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$;
- représenter la **répétition de $n \leq 4$ épreuves de Bernoulli** identiques et indépendantes, et calculer $P(X = k)$ en comptant les chemins.