

Probabilités conditionnelles et indépendance

Feuille d'exercices – séquence complète

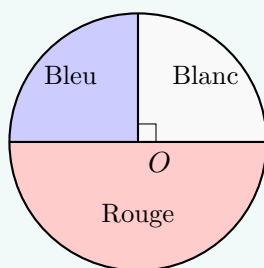
Mathématiques – Première (enseignement scientifique)

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles ou de valeurs décimales arrondies au millième, selon ce qui est le plus adapté. Tout résultat obtenu par lecture d'un arbre ou d'un tableau doit être justifié par un calcul.

1 Arbres de probabilités et probabilités conditionnelles

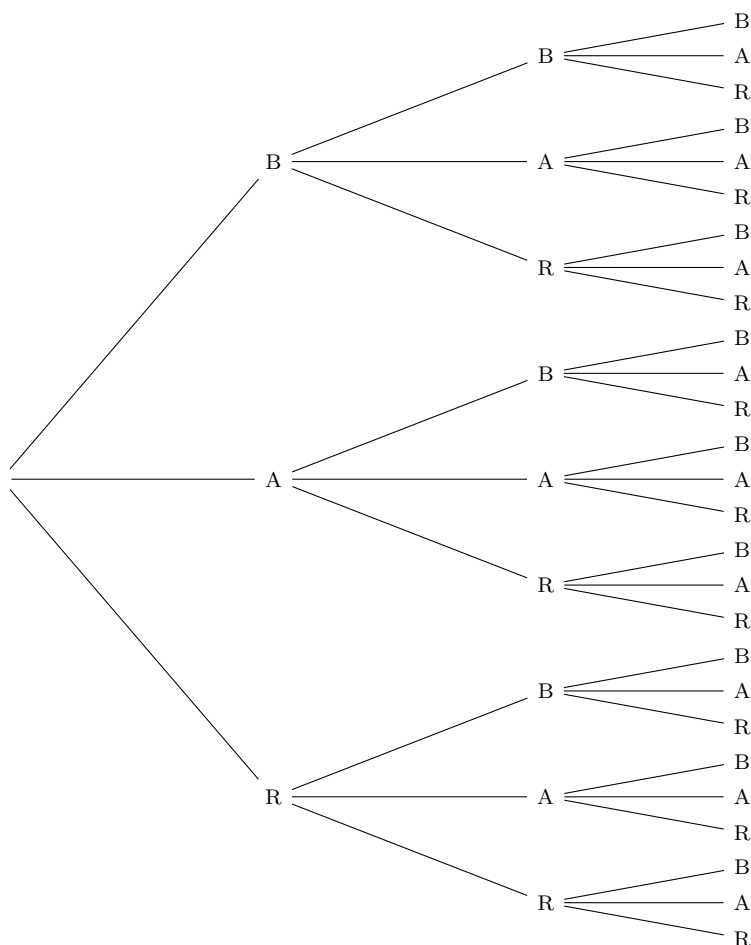
Activité : La roue de loterie

On fait tourner la roue de loterie représentée ci-dessous, de centre O , et on note la couleur obtenue. On réitère une deuxième fois, on note la couleur, puis une troisième fois, et on note à nouveau la couleur.



1. Déterminer la probabilité d'obtenir chacune des trois couleurs en un tour de roue.
2. Compléter l'arbre de la page suivante, qui représente les trois tours de roue.
3. Un joueur est gagnant lorsqu'il obtient, dans cet ordre, les couleurs « Bleu, Blanc, Rouge ». Quelle est la probabilité de gagner à ce jeu ?
4. Quelle est la probabilité de l'évènement : « le joueur obtient les couleurs bleu, blanc et rouge dans le désordre » ?

Arbre à compléter



B : bleu – A : blanc – R : rouge. Compléter les probabilités sur chaque branche.

Correction de l'activité « La roue de loterie »

1. La roue est partagée en quatre quarts : un quart bleu, un quart blanc et deux quarts rouges (le demi-disque du bas). Comme la roue est équilibrée, la probabilité d'une couleur est proportionnelle à l'aire du secteur :

$$P(\text{bleu}) = \frac{1}{4}, \quad P(\text{blanc}) = \frac{1}{4}, \quad P(\text{rouge}) = \frac{1}{2}.$$

On vérifie que $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$.

2. Sur chaque branche menant à « bleu » ou « blanc » on écrit $\frac{1}{4}$, et sur chaque branche menant à « rouge » on écrit $\frac{1}{2}$. Les trois tours de roue sont *identiques et indépendants* : les probabilités inscrites sont donc les mêmes à chaque niveau de l'arbre.

3. La probabilité d'une feuille est le produit des probabilités du chemin qui y mène :

$$P(B; A; R) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32} = 0,03125.$$

4. Obtenir les trois couleurs dans le désordre correspond à 6 chemins de l'arbre (les 6 ordres possibles : BAR, BRA, ABR, ARB, RBA, RAB). Chacun de ces chemins a pour probabilité $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$, quel que soit l'ordre, car le produit ne dépend pas de l'ordre des facteurs. Donc

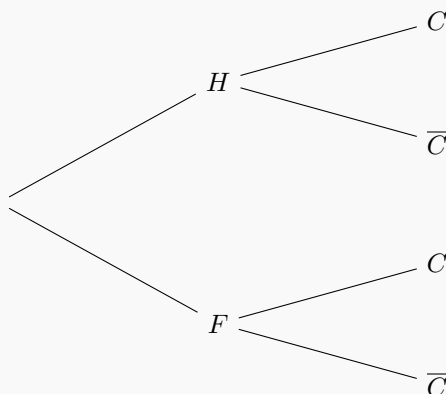
$$P(\text{les trois couleurs}) = 6 \times \frac{1}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16} = 0,1875.$$

Exercice 1: Cadres et ouvriers

Les 1 500 employés d'une grande entreprise se divisent en deux catégories : cadres et ouvriers. Cette entreprise emploie 40 % d'hommes et 60 % de femmes. De plus, parmi les hommes, 63 % sont cadres, alors que parmi les femmes, 48 % sont cadres.

On note H l'évènement « l'employé est un homme », F l'évènement « l'employé est une femme » et C l'évènement « l'employé est cadre ».

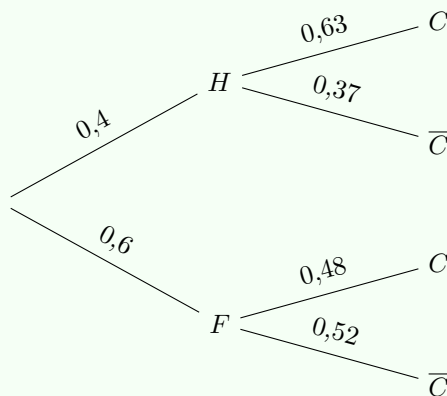
1. Compléter l'arbre ci-dessous en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante. Un tel arbre s'appelle un **arbre pondéré**.



2. Combien y a-t-il de femmes dans l'entreprise ? Combien y a-t-il de femmes cadres ?
3. On choisit au hasard une personne de l'entreprise.
 - a) Quelle est la probabilité $P(F)$ que la personne choisie soit une femme ?
 - b) Quelle est la probabilité $P(F \cap C)$ que la personne choisie soit une femme cadre ?
4. On choisit au hasard une femme de l'entreprise. Quelle est la probabilité que cette femme soit cadre ? On note cette probabilité $P_F(C)$.
5. Montrer que $P(F \cap C) = P_F(C) \times P(F)$, puis exprimer $P_F(C)$ en fonction de $P(F \cap C)$ et de $P(F)$.

Correction de l'exercice 1

1. Arbre pondéré complété :



Les probabilités inscrites au deuxième niveau sont des probabilités *conditionnelles* : par exemple $0,48 = P_F(C)$, probabilité d'être cadre *sachant que* l'employé est une femme. La

somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut bien 1.

2. Nombre de femmes : $1\,500 \times \frac{60}{100} = 900$ femmes.

Nombre de femmes cadres : $900 \times \frac{48}{100} = 432$ femmes cadres.

3. a) $P(F) = \frac{\text{nombre de femmes}}{\text{nombre d'employés}} = \frac{900}{1500} = \frac{3}{5} = 0,6$.

b) $P(F \cap C) = \frac{\text{nombre de femmes cadres}}{\text{nombre d'employés}} = \frac{432}{1500} = \frac{36}{125} = 0,288$.

4. Ici la population de référence n'est plus l'entreprise entière, mais les 900 femmes :

$$P_F(C) = \frac{\text{nombre de femmes cadres}}{\text{nombre de femmes}} = \frac{432}{900} = \frac{12}{25} = 0,48.$$

On retrouve le pourcentage de l'énoncé, ce qui est logique : 48 % des femmes sont cadres.

5. D'une part $P_F(C) \times P(F) = 0,48 \times 0,6 = 0,288$, et d'autre part $P(F \cap C) = 0,288$. Donc

$$P(F \cap C) = P_F(C) \times P(F).$$

Comme $P(F) \neq 0$, on peut diviser par $P(F)$:

$$P_F(C) = \frac{P(F \cap C)}{P(F)}$$

C'est la définition de la probabilité conditionnelle, et c'est aussi la règle de lecture d'un arbre pondéré : *la probabilité d'une feuille est le produit des probabilités du chemin qui y mène.*

Exercice 2: Le cycliste et le feu tricolore

À un croisement se trouve un feu tricolore dont les feux sont alternativement vert, rouge ou orange, avec des probabilités respectives de 0,4 ; 0,5 et 0,1. Des cyclistes empruntent régulièrement ce croisement et une étude statistique a permis de déterminer les résultats suivants :

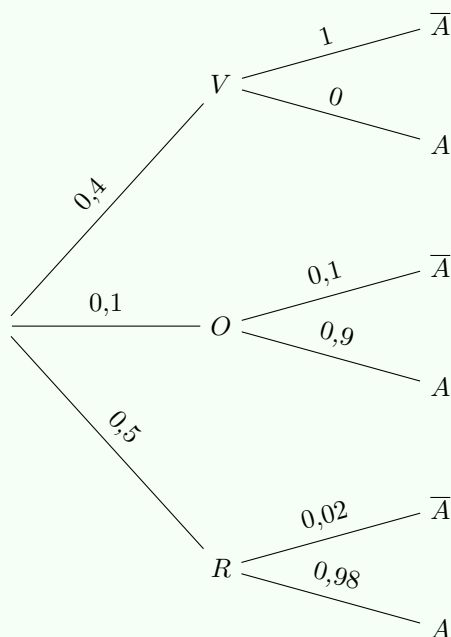
- si le feu est vert, le cycliste passe avec une probabilité de 1 ;
- si le feu est orange, le cycliste passe avec une probabilité de 0,1 ;
- si le feu est rouge, le cycliste passe avec une probabilité de 0,02.

On note V , O et R les événements « le feu est vert », « le feu est orange » et « le feu est rouge », et A l'évènement « le cycliste s'arrête ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le cycliste ne s'arrête pas au feu tricolore.
3. Calculer la probabilité que le feu soit vert, sachant que le cycliste ne s'est pas arrêté au feu.

Correction de l'exercice 2

1. L'évènement « le cycliste passe » est l'évènement contraire de A , noté $\overline{A}$.



2. L'évènement $\bar{A}$ est associé à trois feuilles de l'arbre : $V \cap \bar{A}$, $O \cap \bar{A}$ et $R \cap \bar{A}$. On additionne donc les probabilités de ces trois chemins :

$$P(\bar{A}) = P(V \cap \bar{A}) + P(O \cap \bar{A}) + P(R \cap \bar{A}) = 0,4 \times 1 + 0,1 \times 0,1 + 0,5 \times 0,02 = 0,4 + 0,01 + 0,01 = 0,42.$$

La probabilité que le cycliste ne s'arrête pas est de 0,42.

3. On cherche $P_{\bar{A}}(V)$: la population de référence est maintenant l'ensemble des cyclistes qui ne se sont pas arrêtés.

$$P_{\bar{A}}(V) = \frac{P(V \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0,4 \times 1}{0,42} = \frac{0,4}{0,42} = \frac{20}{21} \approx 0,952.$$

Il y a donc environ 95 % de chances que le feu ait été vert, sachant que le cycliste est passé.

Attention à ne pas confondre : $P_V(\bar{A}) = 1$ (s'il est vert, il passe à coup sûr) alors que $P_{\bar{A}}(V) \approx 0,952$. Les deux probabilités conditionnelles ne se lisent pas dans le même sens.

Exercice 3: Faux positifs

Lors du dépistage d'une maladie rare, touchant près d'une personne sur mille, les tests ne sont pas fiables à 100 %. Après une campagne de dépistage, il y a alors des **faux positifs**, c'est-à-dire des personnes dépistées comme malades alors qu'elles sont saines. À l'inverse, il y a aussi des **faux négatifs**, c'est-à-dire des personnes dépistées comme saines mais en réalité malades. Le problème est alors de savoir quelle est la proportion de faux positifs parmi les détections.

On suppose qu'un patient malade est détecté par le dépistage avec une probabilité de 99 %. À l'inverse, un patient sain est détecté comme tel avec une probabilité de 95 %.

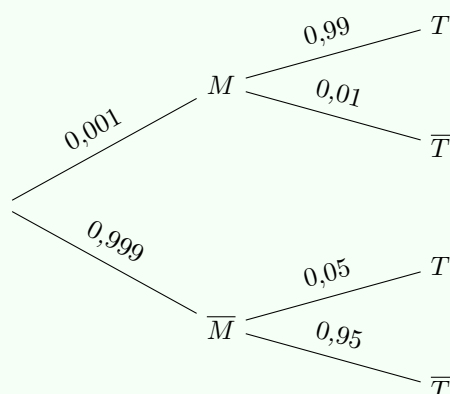
On note les évènements suivants :

- M : la personne est malade ;
- T : la personne est testée positive.

1. Tracer un arbre de probabilité complet modélisant cette situation.
2. Calculer la probabilité qu'une personne prise au hasard soit testée positive.
3. Quelle est la probabilité que je ne sois pas malade, sachant que je suis testé positif?
4. Commenter le résultat obtenu. Ce test est-il inutile pour autant?

Correction de l'exercice 3

1. « Une personne sur mille » donne $P(M) = 0,001$, donc $P(\overline{M}) = 0,999$. Un malade est détecté avec une probabilité de 0,99 : $P_M(T) = 0,99$. Un patient sain est *détecté comme tel*, c'est-à-dire testé négatif, avec une probabilité de 0,95 : $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,95$, donc $P_{\overline{M}}(T) = 1 - 0,95 = 0,05$.



2. Deux feuilles correspondent à un test positif : $M \cap T$ (vrais positifs) et $\overline{M} \cap T$ (faux positifs).

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,001 \times 0,99 + 0,999 \times 0,05 = 0,00099 + 0,04995 = 0,05094.$$

Environ 5,1 % des personnes testées sont déclarées positives.

3. On cherche $P_T(\overline{M})$:

$$P_T(\overline{M}) = \frac{P(\overline{M} \cap T)}{P(T)} = \frac{0,04995}{0,05094} \approx 0,981.$$

4. Environ 98 % des personnes déclarées positives ne sont en réalité *pas* malades : les faux positifs sont très largement majoritaires parmi les tests positifs. Cela peut sembler paradoxal alors que le test est fiable à 95 % et 99 %, mais la maladie est si rare que les 5 % d'erreurs commises sur l'immense population des personnes saines ($0,999 \times 0,05 \approx 0,05$) écrasent numériquement les $0,001 \times 0,99 \approx 0,001$ vrais malades détectés.

Le test n'est pas inutile pour autant : avant le test, la probabilité d'être malade était de 0,001 ; après un test positif, elle est d'environ 0,019, soit près de 20 fois plus. Le test permet de sélectionner une population beaucoup plus petite, sur laquelle on pratiquera un second examen, plus coûteux mais plus fiable. C'est exactement la démarche utilisée dans les dépistages de masse.

2 Croisement de deux caractères et tableaux d'effectifs

Exercice 4: Comment viens-tu au lycée ?

Un lycée interroge 200 élèves de première sur leur mode de déplacement domicile–lycée. Deux caractères sont relevés pour chaque élève : son **lieu d'habitation** (en ville ou hors de la ville) et son **mode de déplacement**. Voici un extrait du fichier de données obtenu :

N°	Élève	Habitation	Déplacement
1	Amel	Ville	À pied ou vélo
2	Baptiste	Hors ville	Bus ou car
3	Chloé	Ville	Bus ou car
4	Diego	Hors ville	Voiture
5	Elsa	Ville	À pied ou vélo
6	Farid	Hors ville	Bus ou car

N°	Élève	Habitation	Déplacement
7	Gaëlle	Ville	Voiture
8	Hugo	Hors ville	Bus ou car
9	Inès	Ville	À pied ou vélo
10	Jonas	Ville	Bus ou car
11	Kenza	Hors ville	Voiture
12	Louis	Ville	À pied ou vélo

1. Dresser le **tableau croisé d'effectifs** de ces 12 premiers élèves : les lignes correspondront au lieu d'habitation, les colonnes au mode de déplacement, et on ajoutera une ligne et une colonne « Total ».
2. On donne maintenant le tableau croisé des 200 élèves interrogés.

	À pied ou vélo	Bus ou car	Voiture	Total
Ville	66	36	18	120
Hors ville	8	56	16	80
Total	74	92	34	200

Calculer les **fréquences marginales** de chacun des trois modes de déplacement, c'est-à-dire les fréquences calculées sur l'ensemble des 200 élèves. Que vaut leur somme ?

3. Calculer les **fréquences conditionnelles** des trois modes de déplacement sachant que l'élève habite en ville, puis sachant qu'il habite hors de la ville. Interpréter les résultats obtenus par une phrase : le lieu d'habitation semble-t-il influencer sur le mode de déplacement ?
4. Représenter les deux profils de la question précédente par un **diagramme en barres** (deux séries de trois barres, en pourcentages).
5. Représenter la répartition des modes de déplacement des seuls élèves habitant en ville par un **diagramme circulaire**. On donnera les angles au degré près.
6. Le fichier de données complet est ouvert dans un tableur : la colonne B contient l'habitation et la colonne C le mode de déplacement (lignes 2 à 201). Déterminer, à

l'aide du tableau, le nombre d'élèves tels que :

- a) (Habitation = « Hors ville ») **ET** (Déplacement = « Bus ou car »);
- b) **NON**(Déplacement = « Voiture »);
- c) (Habitation = « Ville ») **OU** (Déplacement = « Voiture »).

Écrire la formule du tableur qui donne directement le résultat de la question a).

7. On choisit maintenant un élève au hasard parmi les 200, chacun ayant la même probabilité d'être choisi. On note H l'évènement « l'élève habite hors de la ville » et B l'évènement « l'élève vient en bus ou en car ».

Calculer $P(H)$, $P(H \cap B)$ et $P_H(B)$. Quel lien constate-t-on avec les fréquences calculées à la question 3 ?

Correction de l'exercice 4

1. On compte les élèves de l'extrait dans chacune des six cases :

	À pied ou vélo	Bus ou car	Voiture	Total
Ville	4	2	1	7
Hors ville	0	3	2	5
Total	4	5	3	12

La ligne et la colonne « Total » permettent de vérifier le comptage : $7 + 5 = 4 + 5 + 3 = 12$.

2. Les fréquences marginales se calculent par rapport à l'effectif total, 200 :

$$f(\text{à pied ou vélo}) = \frac{74}{200} = 0,37 \quad f(\text{bus ou car}) = \frac{92}{200} = 0,46 \quad f(\text{voiture}) = \frac{34}{200} = 0,17$$

Leur somme vaut $0,37 + 0,46 + 0,17 = 1$, ce qui est normal : tout élève utilise exactement un de ces trois modes.

3. Sachant que l'élève habite en ville, la population de référence n'est plus 200 mais 120 :

$$\frac{66}{120} = 0,55 \quad \frac{36}{120} = 0,30 \quad \frac{18}{120} = 0,15$$

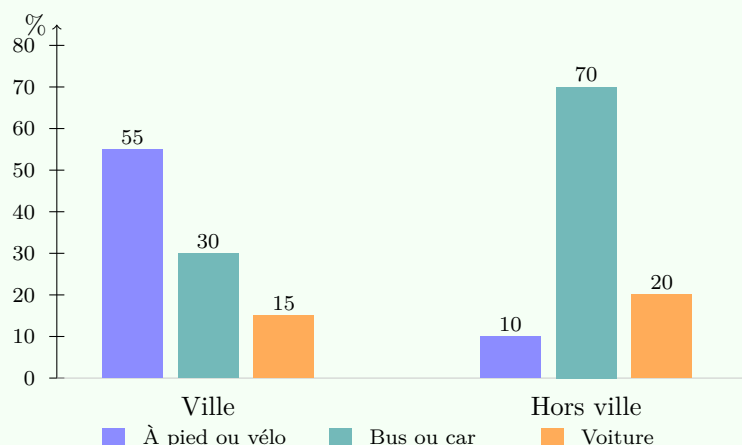
Sachant qu'il habite hors de la ville, la référence est 80 :

$$\frac{8}{80} = 0,10 \quad \frac{56}{80} = 0,70 \quad \frac{16}{80} = 0,20$$

(Dans les deux cas la somme vaut bien 1.)

Parmi les élèves habitant en ville, 55 % viennent à pied ou à vélo et 30 % en bus ; parmi ceux qui habitent hors de la ville, seulement 10 % viennent à pied ou à vélo et 70 % prennent le bus. Les deux profils sont très différents : le lieu d'habitation influe nettement sur le mode de déplacement. En revanche la part de la voiture reste proche (15 % contre 20 %).

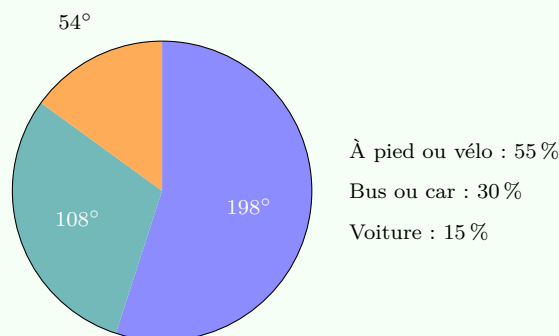
4. Diagramme en barres des deux profils :



5. Pour les 120 élèves habitant en ville, on convertit chaque fréquence en angle en multipliant par 360 :

$$0,55 \times 360 = 198^\circ \quad 0,30 \times 360 = 108^\circ \quad 0,15 \times 360 = 54^\circ$$

(La somme vaut bien $198 + 108 + 54 = 360^\circ$.)



6. a) C'est une seule case du tableau : 56 élèves.

b) « Ne pas venir en voiture » est l'évènement contraire : $200 - 34 = 166$ élèves.

c) Attention à ne pas compter deux fois les élèves qui habitent en ville *et* viennent en voiture :

$$120 + 34 - 18 = 136 \text{ élèves.}$$

Formule du tableur pour la question a) :

`=NB.SI.ENS(B2:B201;"Hors ville";C2:C201;"Bus ou car")`

7. Comme tous les élèves ont la même probabilité d'être choisis, chaque probabilité est une fréquence :

$$P(H) = \frac{80}{200} = 0,4, \quad P(H \cap B) = \frac{56}{200} = 0,28, \quad P_H(B) = \frac{P(H \cap B)}{P(H)} = \frac{0,28}{0,4} = 0,7.$$

On retrouve exactement la fréquence conditionnelle calculée à la question 3 : *dans le cas d'un tirage au sort équiprobable dans une population, une fréquence conditionnelle est une probabilité conditionnelle*. Calculer $P_H(B)$ revient à ne regarder que la ligne « Hors ville » du tableau, en prenant 80 comme nouvel effectif de référence.

Exercice 5: Les élèves de première

Les 500 élèves de première d'un lycée se répartissent de la façon suivante :

	Filles	Garçons	Total
Externes	70	110	180
Demi-pensionnaires	180	120	300
Internes	10	10	20
Total	260	240	500

- Calculer le pourcentage d'internes.
 - Calculer le pourcentage de filles demi-pensionnaires.
- On interroge un élève au hasard parmi les 500. Tous les élèves ont la même probabilité d'être interrogés. On considère les événements suivants :
 - F : « l'élève interrogé est une fille » ;
 - E : « l'élève interrogé est externe » ;
 - D : « l'élève interrogé est demi-pensionnaire » ;
 - I : « l'élève interrogé est interne ».

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

- Traduire par une phrase l'évènement $D \cap \bar{F}$.
- Calculer les probabilités $P(D \cap \bar{F})$, $P(\bar{F})$ et $P(E \cap F)$.
- Calculer $P_E(F)$ et traduire le résultat par une phrase.
- Calculer $P_F(E)$. Pourquoi les deux résultats sont-ils différents ?

Correction de l'exercice 5

1. a) $\frac{20}{500} \times 100 = 4$. Il y a 4 % d'internes.

b) $\frac{180}{500} \times 100 = 36$. Il y a 36 % de filles demi-pensionnaires.

2. a) $D \cap \bar{F}$ est l'évènement « l'élève interrogé est demi-pensionnaire et n'est pas une fille », autrement dit « l'élève interrogé est un garçon demi-pensionnaire ».

b) On lit les effectifs dans le tableau, en divisant par l'effectif total 500 :

$$P(D \cap \bar{F}) = \frac{120}{500} = \frac{6}{25}, \quad P(\bar{F}) = \frac{240}{500} = \frac{12}{25}, \quad P(E \cap F) = \frac{70}{500} = \frac{7}{50}.$$

c) La population de référence devient l'ensemble des externes, soit 180 élèves :

$$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{70}{500}}{\frac{180}{500}} = \frac{70}{180} = \frac{7}{18} \approx 0,39.$$

La probabilité que l'élève soit une fille, sachant que cet élève est externe, est d'environ 0,39. Autrement dit, 39 % des externes sont des filles.

d) Cette fois la référence est l'ensemble des filles, soit 260 élèves :

$$P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{70}{260} = \frac{7}{26} \approx 0,27.$$

Les deux résultats sont différents car ils ne répondent pas à la même question : $P_E(F)$ est la proportion de filles *parmi les externes* (70 sur 180), tandis que $P_F(E)$ est la proportion d'externes *parmi les filles* (70 sur 260). Le numérateur est le même, le dénominateur change.

Exercice 6: Médicament et placebo

Lors du test d'un médicament sur 300 personnes, 80 ont reçu sans le savoir un médicament placebo. Les effets secondaires relevés sont les suivants :

	Maux de tête	Maux de ventre	Aucun effet	Total
Médicament	25	18	177	220
Placebo	12	6	62	80
Total	37	24	239	300

On choisit au hasard un participant du test. On note A l'évènement « le patient ressent des effets secondaires » et B l'évènement « le patient a reçu un placebo ».

1. Calculer les probabilités des évènements A et B . Arrondir à 0,01 près.
2. Calculer et interpréter $P(\bar{A} \cap B)$.
3. Calculer et interpréter $P(A \cup B)$.
4. Calculer la probabilité que le patient ait des maux de tête, sachant qu'il a pris le médicament.
5. Calculer la probabilité que le patient ait des maux de tête, sachant qu'il a pris le placebo. Que peut-on en conclure ?

Correction de l'exercice 6

1. Ressentir des effets secondaires, c'est avoir des maux de tête *ou* des maux de ventre :

$$P(A) = \frac{37 + 24}{300} = \frac{61}{300} \approx 0,20, \quad P(B) = \frac{80}{300} = \frac{4}{15} \approx 0,27.$$

2. $\bar{A} \cap B$ est l'évènement « le patient n'a ressenti aucun effet secondaire et a reçu le placebo ». Il correspond à une seule case du tableau :

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{62}{300} = \frac{31}{150} \approx 0,21.$$

3. $A \cup B$ est l'évènement « le patient a ressenti des effets secondaires *ou* a reçu le placebo ». On utilise la formule

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Les patients qui ont reçu le placebo *et* ressenti des effets secondaires sont au nombre de $12 + 6 = 18$, donc $P(A \cap B) = \frac{18}{300} = \frac{3}{50}$. Ainsi

$$P(A \cup B) = \frac{61}{300} + \frac{80}{300} - \frac{18}{300} = \frac{123}{300} = \frac{41}{100} = 0,41.$$

La soustraction est indispensable : sans elle, les 18 patients qui vérifient les deux conditions seraient comptés deux fois.

4. On note T l'évènement « le patient a des maux de tête ». Avoir pris le médicament, c'est l'évènement $\bar{B}$: la référence est donc l'ensemble des 220 patients ayant reçu le médicament.

$$P_{\bar{B}}(T) = \frac{P(\bar{B} \cap T)}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{25}{300}}{\frac{220}{300}} = \frac{25}{220} = \frac{5}{44} \approx 0,11.$$

5. La référence est cette fois l'ensemble des 80 patients ayant reçu le placebo :

$$P_B(T) = \frac{P(B \cap T)}{P(B)} = \frac{\frac{12}{300}}{\frac{80}{300}} = \frac{12}{80} = \frac{3}{20} = 0,15.$$

La fréquence des maux de tête est même légèrement *plus* élevée chez les patients ayant reçu le placebo (15 %) que chez ceux ayant reçu le médicament (11 %). Sur cet échantillon, les maux de tête ne peuvent donc pas être attribués au médicament : c'est précisément le rôle d'un groupe placebo dans un essai clinique. (Avec des effectifs aussi faibles, l'écart observé pourrait toutefois n'être dû qu'au hasard de l'échantillonnage.)

3 Indépendance de deux évènements

Activité : Les coffres du jeu mobile

Un jeu mobile propose aux joueurs d'ouvrir un coffre chaque jour. Ces coffres peuvent contenir un arc, un bouclier ou une épée. La probabilité d'apparition de ces trois objets est identique chaque jour.

Partie A : obtenir deux arcs

On note A_n l'évènement « obtenir l'arc le n -ième jour », B_n l'évènement « obtenir le bouclier le n -ième jour » et E_n l'évènement « obtenir l'épée le n -ième jour », où n est un entier naturel non nul.

Un joueur s'inscrit au jeu, puis ouvre un coffre trois jours de suite.

1. a) Interpréter puis déterminer $P_{A_1}(A_2)$.
b) Déterminer $P(A_2)$.

On dit que deux évènements F et G sont **indépendants** lorsque $P_G(F) = P(F)$, autrement dit lorsque la probabilité de l'évènement F ne dépend pas de la réalisation de l'évènement G .

2. Que peut-on dire des évènements A_1 et A_2 ?

Partie B : compléter la collection

Le joueur commence le jeu sans équipement. Il ouvre un coffre par jour dans l'espoir de détenir les trois objets le plus vite possible. Il souhaite connaître la probabilité d'y arriver dès le troisième jour.

On appelle U l'évènement « avoir un des trois objets le premier jour », D l'évènement « avoir deux des trois objets le deuxième jour » et T l'évènement « avoir les trois objets différents le troisième jour ».

1. Quelle est la probabilité de l'évènement U ?
2. Déterminer $P(T)$.
3. a) On suppose maintenant que le joueur possède deux objets différents le deuxième jour. Quelle est la probabilité que le coffre du troisième jour lui donne l'objet manquant ?
b) En déduire $P_D(T)$.
4. Les évènements D et T sont-ils indépendants ?

Correction de l'activité « Les coffres du jeu mobile »

Les trois objets sont équiprobables : à chaque ouverture, chacun a une probabilité $\frac{1}{3}$ d'apparaître.

Partie A

1. a) $P_{A_1}(A_2)$ est la probabilité d'obtenir l'arc le deuxième jour, *sachant que* l'on a obtenu l'arc le premier jour. Le contenu du coffre du deuxième jour ne dépend pas de celui du premier : $P_{A_1}(A_2) = \frac{1}{3}$.

b) De la même façon, sans aucune information sur le premier jour, $P(A_2) = \frac{1}{3}$.

2. On constate que $P_{A_1}(A_2) = P(A_2) = \frac{1}{3}$: savoir que le joueur a eu un arc le premier jour ne change rien à ses chances d'en avoir un le deuxième. Les événements A_1 et A_2 sont donc **indépendants**.

Partie B

1. Le premier jour, le joueur obtient forcément l'un des trois objets, et il n'en possédait aucun : $P(U) = 1$.

2. Avoir les trois objets différents au bout de trois jours signifie que les trois coffres ont donné trois objets tous différents. Il y a $3 \times 3 \times 3 = 27$ suites de trois objets possibles, toutes de même probabilité $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$, et $3 \times 2 \times 1 = 6$ d'entre elles sont formées de trois objets distincts. Donc

$$P(T) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9} \approx 0,222.$$

3. a) Il ne manque plus qu'un objet sur les trois : la probabilité que le coffre du troisième jour donne précisément celui-là est $\frac{1}{3}$.

b) C'est exactement la définition de $P_D(T)$: $P_D(T) = \frac{1}{3}$.

4. On compare : $P_D(T) = \frac{1}{3}$ et $P(T) = \frac{2}{9}$. Comme $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} \neq \frac{2}{9}$, on a $P_D(T) \neq P(T)$: les événements D et T ne sont **pas indépendants**.

C'est logique : pour espérer avoir les trois objets le troisième jour, il faut impérativement en avoir déjà deux différents le deuxième. Savoir que D est réalisé améliore les chances de T (de $\frac{2}{9}$ à $\frac{1}{3}$).

Remarque : Deux façons de tester l'indépendance

Deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants lorsque

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{ou, de façon équivalente,} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

La seconde égalité est en général la plus commode pour *vérifier* l'indépendance : elle est symétrique en A et B , et ne demande aucune division.

Exercice 7: Ces évènements sont-ils indépendants ?

Dans chacun des cas suivants, déterminer si les évènements A et B sont indépendants.

1. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. A : « la carte tirée est un roi » ; B : « la carte tirée est un trèfle ».
2. On tire au hasard une carte dans un jeu de 54 cartes (il y a les deux jokers). A : « la carte tirée est un roi » ; B : « la carte tirée est un trèfle ».
3. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. A : « la carte tirée est rouge » ; B : « la carte tirée est un cœur ».
4. On lance un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. A : « le nombre obtenu est pair » ; B : « le nombre obtenu est inférieur ou égal à 3 ».

Correction de l'exercice 7

On teste à chaque fois l'égalité $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

- 1.** Il y a 4 rois et 8 trèfles parmi les 32 cartes, et une seule carte est à la fois un roi et un trèfle (le roi de trèfle) :

$$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}, \quad P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{32}.$$

Or $P(A) \times P(B) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = P(A \cap B)$: les évènements A et B sont **indépendants**.

- 2.** Avec les deux jokers, il y a toujours 4 rois, 13 trèfles et un seul roi de trèfle, mais sur 54 cartes :

$$P(A) = \frac{4}{54} = \frac{2}{27}, \quad P(B) = \frac{13}{54}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{54}.$$

Or $P(A) \times P(B) = \frac{2}{27} \times \frac{13}{54} = \frac{26}{1458} = \frac{13}{729} \approx 0,0178$, alors que $P(A \cap B) = \frac{1}{54} \approx 0,0185$. Ces deux nombres sont différents : A et B ne sont **pas indépendants**.

Les deux jokers, qui ne sont ni rois ni trèfles, suffisent à détruire l'indépendance : c'est un bon rappel que l'indépendance est une propriété *numérique*, qui se vérifie par le calcul et ne se devine pas.

- 3.** Les cartes rouges sont les cœurs et les carreaux, soit 16 cartes ; les cœurs sont au nombre de 8. Tout cœur étant rouge, $A \cap B = B$:

$$P(A) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Or $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4}$: les évènements ne sont **pas indépendants**. C'était prévisible : savoir que la carte est un cœur garantit qu'elle est rouge, donc $P_B(A) = 1 \neq P(A)$.

- 4.** $A = \{2; 4; 6\}$, $B = \{1; 2; 3\}$ et $A \cap B = \{2\}$:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

Or $P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{6}$: les évènements ne sont **pas indépendants**.

Exercice 8: Une boule dans une urne

1. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard et on considère les événements

A : « tirage d'un nombre pair » et B : « tirage d'un multiple de 3 ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2. Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules, numérotées de 1 à 13.

Correction de l'exercice 8

1. Parmi les nombres de 1 à 12, il y a 6 nombres pairs (2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12), 4 multiples de 3 (3 ; 6 ; 9 ; 12) et 2 nombres à la fois pairs et multiples de 3 (6 et 12) :

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Or $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P(A \cap B)$: les événements A et B sont **indépendants**.

2. Avec 13 boules, les effectifs ne changent pas (la boule 13 n'est ni paire ni multiple de 3), mais l'effectif total, lui, change :

$$P(A) = \frac{6}{13}, \quad P(B) = \frac{4}{13}, \quad P(A \cap B) = \frac{2}{13}.$$

Or $P(A) \times P(B) = \frac{6}{13} \times \frac{4}{13} = \frac{24}{169}$, tandis que $P(A \cap B) = \frac{2}{13} = \frac{26}{169}$. Ces deux nombres sont différents : A et B ne sont **pas indépendants**.

Une seule boule ajoutée fait disparaître l'indépendance. Retenons que l'indépendance de deux événements n'a rien d'« intuitif » : elle dépend des effectifs et doit toujours être vérifiée par le calcul.

4 Répétition d'épreuves identiques et indépendantes ($n \leq 4$)**Remarque : Vocabulaire**

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire n'ayant que deux issues : l'une appelée *succès*, de probabilité p , l'autre appelée *échec*, de probabilité $1 - p$.

Lorsqu'on répète n fois la même épreuve de Bernoulli, de façon **identique et indépendante**, on représente la situation par un arbre à n niveaux, dont toutes les branches « succès » portent la même probabilité p . On note alors X le **nombre de succès** obtenus.

- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.
- $P(X = k)$ s'obtient en additionnant les probabilités de tous les chemins comportant exactement k succès.

Dans toute cette partie, $n \leq 4$: on peut donc toujours dessiner l'arbre et compter les chemins.

Exercice 9: La double faute

Un joueur de tennis a droit à deux tentatives pour réussir sa mise en jeu. Gladys réussit son service dans 65 % des cas. On considère que les deux tentatives de Gladys sont indépendantes.

1. Identifier l'épreuve de Bernoulli répétée, le succès, la probabilité p et le nombre n de répétitions.
2. Quelle est la probabilité qu'elle fasse une double faute ?
3. Quelle est la probabilité qu'elle réussisse sa mise en jeu ?

Correction de l'exercice 9

1. L'épreuve de Bernoulli est « Gladys tente un service », le succès est « le service est réussi », de probabilité $p = 0,65$; l'échec (la faute) a pour probabilité $1 - 0,65 = 0,35$. Cette épreuve est répétée $n = 2$ fois, de façon identique et indépendante.

2. Faire une double faute, c'est échouer aux deux tentatives, soit obtenir $X = 0$ succès. Un seul chemin de l'arbre y mène :

$$P(X = 0) = 0,35 \times 0,35 = 0,35^2 = 0,1225.$$

La probabilité d'une double faute est de 0,1225, soit environ 12 %.

3. Réussir sa mise en jeu, c'est réussir au moins un des deux services, c'est-à-dire l'évènement contraire du précédent :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,1225 = 0,8775.$$

Le réflexe à retenir : « au moins un succès » se calcule presque toujours par l'évènement contraire « aucun succès ».

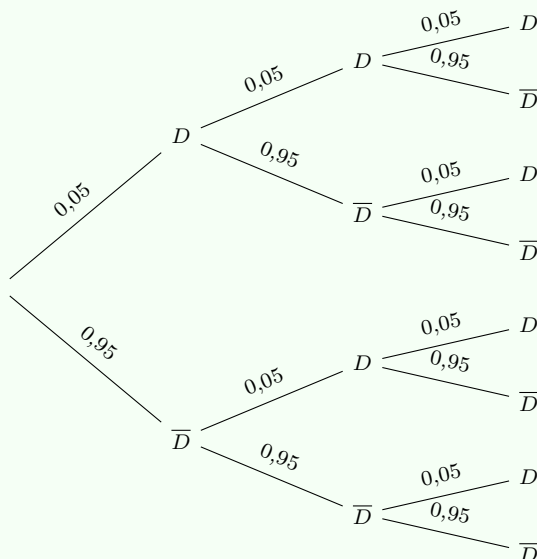
Exercice 10: Contrôle qualité

Une machine produit des pièces dont 5 % sont défectueuses. On prélève au hasard 3 pièces dans la production, suffisamment nombreuse pour que les prélèvements soient considérés comme indépendants. On note X le nombre de pièces défectueuses parmi les 3 pièces prélevées.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $P(X = 0)$ et interpréter le résultat.
3. En déduire la probabilité qu'au moins une pièce soit défectueuse.
4. Calculer $P(X = 1)$.

Correction de l'exercice 10

1. Le succès est ici « la pièce est défectueuse », noté D , avec $p = 0,05$; l'échec $\bar{D}$ a pour probabilité 0,95. On répète $n = 3$ fois.



Toutes les branches « succès » portent la même probabilité 0,05 et toutes les branches « échec » la même probabilité 0,95 : c'est la traduction du fait que les trois prélèvements sont *identiques* et *indépendants*.

2. $X = 0$ correspond à l'unique chemin « trois pièces correctes » :

$$P(X = 0) = 0,95 \times 0,95 \times 0,95 = 0,95^3 \approx 0,857.$$

Il y a environ 85,7 % de chances que les trois pièces prélevées soient toutes correctes.

3. « Au moins une pièce défectueuse » est l'évènement contraire de « aucune pièce défectueuse » :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - 0,857 = 0,143.$$

4. $X = 1$ correspond à 3 chemins de l'arbre : la pièce défectueuse peut être la première, la deuxième ou la troisième. Chacun de ces chemins a la même probabilité $0,05 \times 0,95 \times 0,95$, l'ordre des facteurs ne changeant pas le produit. Donc

$$P(X = 1) = 3 \times 0,05 \times 0,95^2 \approx 0,135.$$

Exercice 11: Trois tours de roue

On reprend la roue de loterie de l'activité du début de cette feuille : un quart bleu, un quart blanc, un demi-disque rouge. On la fait tourner 3 fois de suite et on note X le nombre de fois où l'on obtient la couleur bleue.

1. Justifier qu'il s'agit bien de la répétition de 3 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, et préciser p .
2. Calculer $P(X = 0)$.
3. Calculer $P(X = 3)$.
4. Calculer $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.
5. Recopier et compléter le tableau suivant, appelé **loi de probabilité** de X . Vérifier que la somme de la dernière ligne vaut 1.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$				

Correction de l'exercice 11

1. À chaque tour, on ne s'intéresse qu'à deux issues : « bleu » (le succès) et « pas bleu » (l'échec). C'est donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = P(\text{bleu}) = \frac{1}{4}$. La roue n'a pas de mémoire : les trois tours sont identiques et indépendants. On a donc bien $n = 3$ répétitions, et $1 - p = \frac{3}{4}$.

2. $X = 0$: aucun bleu, un seul chemin.

$$P(X = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} \approx 0,422.$$

3. $X = 3$: trois bleus, un seul chemin.

$$P(X = 3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \approx 0,016.$$

4. $X = 1$: le bleu peut sortir au 1^{er}, au 2^e ou au 3^e tour, soit 3 chemins de probabilité $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$ chacun :

$$P(X = 1) = 3 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 3 \times \frac{9}{64} = \frac{27}{64} \approx 0,422.$$

$X = 2$: c'est le tour *sans* bleu qui peut être le 1^{er}, le 2^e ou le 3^e, soit encore 3 chemins :

$$P(X = 2) = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} = 3 \times \frac{3}{64} = \frac{9}{64} \approx 0,141.$$

5. Loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

Somme : $\frac{27 + 27 + 9 + 1}{64} = \frac{64}{64} = 1. \checkmark$

Ce contrôle est systématique : les valeurs 0, 1, 2, 3 épuisent tous les cas possibles, donc la somme de leurs probabilités vaut toujours 1. Si ce n'est pas le cas, c'est qu'un chemin a été oublié ou compté deux fois.