

Probabilités conditionnelles et indépendance

Feuille d'exercices – séquence complète

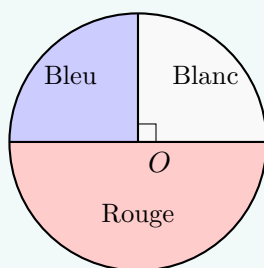
Mathématiques – Première (enseignement scientifique)

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles ou de valeurs décimales arrondies au millième, selon ce qui est le plus adapté. Tout résultat obtenu par lecture d'un arbre ou d'un tableau doit être justifié par un calcul.

1 Arbres de probabilités et probabilités conditionnelles

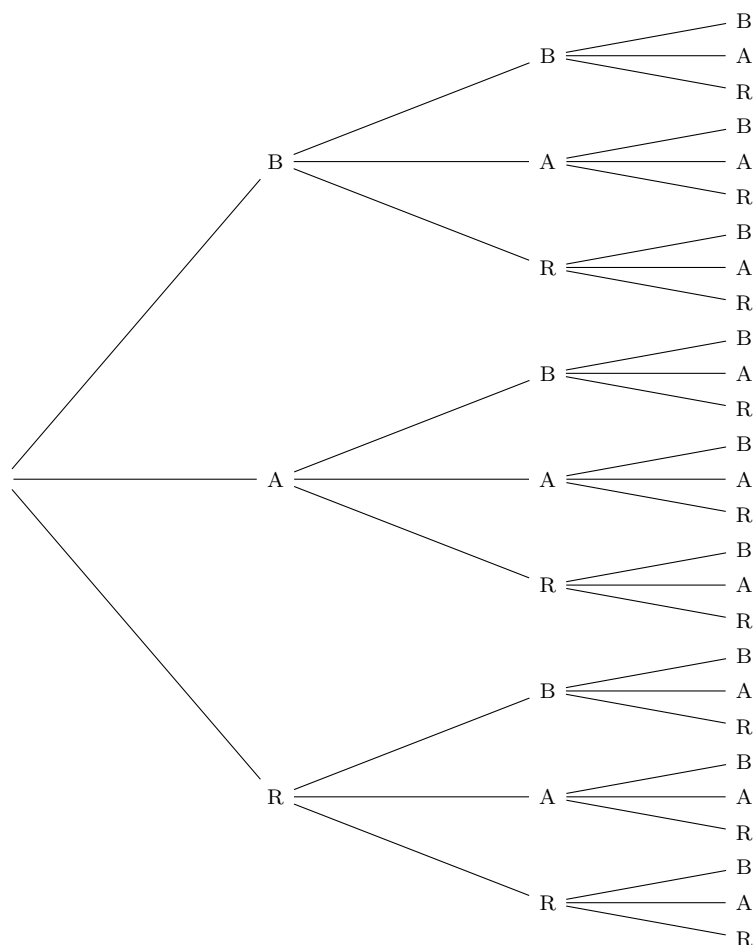
Activité : La roue de loterie

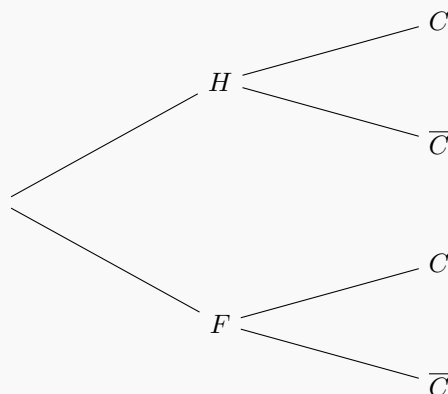
On fait tourner la roue de loterie représentée ci-dessous, de centre O , et on note la couleur obtenue. On réitère une deuxième fois, on note la couleur, puis une troisième fois, et on note à nouveau la couleur.



1. Déterminer la probabilité d'obtenir chacune des trois couleurs en un tour de roue.
2. Compléter l'arbre de la page suivante, qui représente les trois tours de roue.
3. Un joueur est gagnant lorsqu'il obtient, dans cet ordre, les couleurs « Bleu, Blanc, Rouge ». Quelle est la probabilité de gagner à ce jeu ?
4. Quelle est la probabilité de l'évènement : « le joueur obtient les couleurs bleu, blanc et rouge dans le désordre » ?

Arbre à compléter





2. Combien y a-t-il de femmes dans l'entreprise ? Combien y a-t-il de femmes cadres ?
3. On choisit au hasard une personne de l'entreprise.
 - a) Quelle est la probabilité $P(F)$ que la personne choisie soit une femme ?
 - b) Quelle est la probabilité $P(F \cap C)$ que la personne choisie soit une femme cadre ?
4. On choisit au hasard une femme de l'entreprise. Quelle est la probabilité que cette femme soit cadre ? On note cette probabilité $P_F(C)$.
5. Montrer que $P(F \cap C) = P_F(C) \times P(F)$, puis exprimer $P_F(C)$ en fonction de $P(F \cap C)$ et de $P(F)$.

Exercice 2: Le cycliste et le feu tricolore

À un croisement se trouve un feu tricolore dont les feux sont alternativement vert, rouge ou orange, avec des probabilités respectives de 0,4 ; 0,5 et 0,1. Des cyclistes empruntent régulièrement ce croisement et une étude statistique a permis de déterminer les résultats suivants :

- si le feu est vert, le cycliste passe avec une probabilité de 1 ;
- si le feu est orange, le cycliste passe avec une probabilité de 0,1 ;
- si le feu est rouge, le cycliste passe avec une probabilité de 0,02.

On note V , O et R les événements « le feu est vert », « le feu est orange » et « le feu est rouge », et A l'événement « le cycliste s'arrête ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le cycliste ne s'arrête pas au feu tricolore.
3. Calculer la probabilité que le feu soit vert, sachant que le cycliste ne s'est pas arrêté au feu.

Exercice 3: Faux positifs

Lors du dépistage d'une maladie rare, touchant près d'une personne sur mille, les tests ne sont pas fiables à 100 %. Après une campagne de dépistage, il y a alors des **faux positifs**, c'est-à-dire des personnes dépistées comme malades alors qu'elles sont saines. À l'inverse, il y a aussi des **faux négatifs**, c'est-à-dire des personnes dépistées comme saines mais en réalité malades. Le problème est alors de savoir quelle est la proportion de faux positifs parmi les détections.

On suppose qu'un patient malade est détecté par le dépistage avec une probabilité de 99 %. À l'inverse, un patient sain est détecté comme tel avec une probabilité de 95 %.

On note les évènements suivants :

- M : la personne est malade ;
- T : la personne est testée positive.

1. Tracer un arbre de probabilité complet modélisant cette situation.
2. Calculer la probabilité qu'une personne prise au hasard soit testée positive.
3. Quelle est la probabilité que je ne sois pas malade, sachant que je suis testé positif ?
4. Commenter le résultat obtenu. Ce test est-il inutile pour autant ?

2 Croisement de deux caractères et tableaux d'effectifs

Exercice 4: Comment viens-tu au lycée ?

Un lycée interroge 200 élèves de première sur leur mode de déplacement domicile–lycée. Deux caractères sont relevés pour chaque élève : son **lieu d'habitation** (en ville ou hors de la ville) et son **mode de déplacement**. Voici un extrait du fichier de données obtenu :

N°	Élève	Habitation	Déplacement
1	Amel	Ville	À pied ou vélo
2	Baptiste	Hors ville	Bus ou car
3	Chloé	Ville	Bus ou car
4	Diego	Hors ville	Voiture
5	Elsa	Ville	À pied ou vélo
6	Farid	Hors ville	Bus ou car

N°	Élève	Habitation	Déplacement
7	Gaëlle	Ville	Voiture
8	Hugo	Hors ville	Bus ou car
9	Inès	Ville	À pied ou vélo
10	Jonas	Ville	Bus ou car
11	Kenza	Hors ville	Voiture
12	Louis	Ville	À pied ou vélo

1. Dresser le **tableau croisé d'effectifs** de ces 12 premiers élèves : les lignes correspondront au lieu d'habitation, les colonnes au mode de déplacement, et on ajoutera une ligne et une colonne « Total ».
2. On donne maintenant le tableau croisé des 200 élèves interrogés.

	À pied ou vélo	Bus ou car	Voiture	Total
Ville	66	36	18	120
Hors ville	8	56	16	80
Total	74	92	34	200

Calculer les **fréquences marginales** de chacun des trois modes de déplacement, c'est-à-dire les fréquences calculées sur l'ensemble des 200 élèves. Que vaut leur

somme ?

3. Calculer les **fréquences conditionnelles** des trois modes de déplacement sachant que l'élève habite en ville, puis sachant qu'il habite hors de la ville. Interpréter les résultats obtenus par une phrase : le lieu d'habitation semble-t-il influencer sur le mode de déplacement ?
4. Représenter les deux profils de la question précédente par un **diagramme en barres** (deux séries de trois barres, en pourcentages).
5. Représenter la répartition des modes de déplacement des seuls élèves habitant en ville par un **diagramme circulaire**. On donnera les angles au degré près.
6. Le fichier de données complet est ouvert dans un tableur : la colonne B contient l'habitation et la colonne C le mode de déplacement (lignes 2 à 201). Déterminer, à l'aide du tableau, le nombre d'élèves tels que :
 - a) (Habitation = « Hors ville ») **ET** (Déplacement = « Bus ou car ») ;
 - b) **NON**(Déplacement = « Voiture ») ;
 - c) (Habitation = « Ville ») **OU** (Déplacement = « Voiture »).

Écrire la formule du tableur qui donne directement le résultat de la question a).

7. On choisit maintenant un élève au hasard parmi les 200, chacun ayant la même probabilité d'être choisi. On note H l'évènement « l'élève habite hors de la ville » et B l'évènement « l'élève vient en bus ou en car ».

Calculer $P(H)$, $P(H \cap B)$ et $P_H(B)$. Quel lien constate-t-on avec les fréquences calculées à la question 3 ?

Exercice 5: Les élèves de première

Les 500 élèves de première d'un lycée se répartissent de la façon suivante :

	Filles	Garçons	Total
Externes	70	110	180
Demi-pensionnaires	180	120	300
Internes	10	10	20
Total	260	240	500

1.
 - a) Calculer le pourcentage d'internes.
 - b) Calculer le pourcentage de filles demi-pensionnaires.
2. On interroge un élève au hasard parmi les 500. Tous les élèves ont la même probabilité d'être interrogés. On considère les événements suivants :
 - F : « l'élève interrogé est une fille » ;
 - E : « l'élève interrogé est externe » ;
 - D : « l'élève interrogé est demi-pensionnaire » ;
 - I : « l'élève interrogé est interne ».

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

- a) Traduire par une phrase l'évènement $D \cap \bar{F}$.
- b) Calculer les probabilités $P(D \cap \bar{F})$, $P(\bar{F})$ et $P(E \cap F)$.
- c) Calculer $P_E(F)$ et traduire le résultat par une phrase.
- d) Calculer $P_F(E)$. Pourquoi les deux résultats sont-ils différents ?

Exercice 6: Médicament et placebo

Lors du test d'un médicament sur 300 personnes, 80 ont reçu sans le savoir un médicament placebo. Les effets secondaires relevés sont les suivants :

	Maux de tête	Maux de ventre	Aucun effet	Total
Médicament	25	18	177	220
Placebo	12	6	62	80
Total	37	24	239	300

On choisit au hasard un participant du test. On note A l'évènement « le patient ressent des effets secondaires » et B l'évènement « le patient a reçu un placebo ».

1. Calculer les probabilités des évènements A et B . Arrondir à 0,01 près.
2. Calculer et interpréter $P(\bar{A} \cap B)$.
3. Calculer et interpréter $P(A \cup B)$.
4. Calculer la probabilité que le patient ait des maux de tête, sachant qu'il a pris le médicament.
5. Calculer la probabilité que le patient ait des maux de tête, sachant qu'il a pris le placebo. Que peut-on en conclure ?

3 Indépendance de deux évènements**Activité : Les coffres du jeu mobile**

Un jeu mobile propose aux joueurs d'ouvrir un coffre chaque jour. Ces coffres peuvent contenir un arc, un bouclier ou une épée. La probabilité d'apparition de ces trois objets est identique chaque jour.

Partie A : obtenir deux arcs

On note A_n l'évènement « obtenir l'arc le n -ième jour », B_n l'évènement « obtenir le bouclier le n -ième jour » et E_n l'évènement « obtenir l'épée le n -ième jour », où n est un entier naturel non nul.

Un joueur s'inscrit au jeu, puis ouvre un coffre trois jours de suite.

1. a) Interpréter puis déterminer $P_{A_1}(A_2)$.
b) Déterminer $P(A_2)$.

On dit que deux évènements F et G sont **indépendants** lorsque $P_G(F) = P(F)$, autrement dit lorsque la probabilité de l'évènement F ne dépend pas de la réalisation de l'évènement G .

2. Que peut-on dire des évènements A_1 et A_2 ?

Partie B : compléter la collection

Le joueur commence le jeu sans équipement. Il ouvre un coffre par jour dans l'espoir de détenir les trois objets le plus vite possible. Il souhaite connaître la probabilité d'y arriver dès le troisième jour.

On appelle U l'évènement « avoir un des trois objets le premier jour », D l'évènement « avoir deux des trois objets le deuxième jour » et T l'évènement « avoir les trois objets différents le troisième jour ».

1. Quelle est la probabilité de l'évènement U ?
2. Déterminer $P(T)$.
3. a) On suppose maintenant que le joueur possède deux objets différents le deuxième jour. Quelle est la probabilité que le coffre du troisième jour lui donne l'objet manquant ?
b) En déduire $P_D(T)$.
4. Les évènements D et T sont-ils indépendants ?

Remarque : Deux façons de tester l'indépendance

Deux évènements A et B de probabilité non nulle sont indépendants lorsque

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{ou, de façon équivalente,} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

La seconde égalité est en général la plus commode pour *vérifier* l'indépendance : elle est symétrique en A et B , et ne demande aucune division.

Exercice 7: Ces évènements sont-ils indépendants ?

Dans chacun des cas suivants, déterminer si les évènements A et B sont indépendants.

1. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. A : « la carte tirée est un roi » ; B : « la carte tirée est un trèfle ».
2. On tire au hasard une carte dans un jeu de 54 cartes (il y a les deux jokers). A : « la carte tirée est un roi » ; B : « la carte tirée est un trèfle ».
3. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. A : « la carte tirée est rouge » ; B : « la carte tirée est un cœur ».
4. On lance un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. A : « le nombre obtenu est pair » ; B : « le nombre obtenu est inférieur ou égal à 3 ».

Exercice 8: Une boule dans une urne

1. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard et on considère les évènements

$$A : \text{« tirage d'un nombre pair »} \quad \text{et} \quad B : \text{« tirage d'un multiple de 3 »}.$$

Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

2. Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules, numérotées de 1 à 13.

4 Répétition d'épreuves identiques et indépendantes ($n \leq 4$)

Remarque : Vocabulaire

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire n'ayant que deux issues : l'une appelée *succès*, de probabilité p , l'autre appelée *échec*, de probabilité $1 - p$.

Lorsqu'on répète n fois la même épreuve de Bernoulli, de façon **identique et indépendante**, on représente la situation par un arbre à n niveaux, dont toutes les branches « succès » portent la même probabilité p . On note alors X le **nombre de succès** obtenus.

— La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités rencontrées le long de ce

chemin.

- $P(X = k)$ s'obtient en additionnant les probabilités de tous les chemins comportant exactement k succès.

Dans toute cette partie, $n \leq 4$: on peut donc toujours dessiner l'arbre et compter les chemins.

Exercice 9: La double faute

Un joueur de tennis a droit à deux tentatives pour réussir sa mise en jeu. Gladys réussit son service dans 65 % des cas. On considère que les deux tentatives de Gladys sont indépendantes.

1. Identifier l'épreuve de Bernoulli répétée, le succès, la probabilité p et le nombre n de répétitions.
2. Quelle est la probabilité qu'elle fasse une double faute ?
3. Quelle est la probabilité qu'elle réussisse sa mise en jeu ?

Exercice 10: Contrôle qualité

Une machine produit des pièces dont 5 % sont défectueuses. On prélève au hasard 3 pièces dans la production, suffisamment nombreuse pour que les prélèvements soient considérés comme indépendants. On note X le nombre de pièces défectueuses parmi les 3 pièces prélevées.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $P(X = 0)$ et interpréter le résultat.
3. En déduire la probabilité qu'au moins une pièce soit défectueuse.
4. Calculer $P(X = 1)$.

Exercice 11: Trois tours de roue

On reprend la roue de loterie de l'activité du début de cette feuille : un quart bleu, un quart blanc, un demi-disque rouge. On la fait tourner 3 fois de suite et on note X le nombre de fois où l'on obtient la couleur bleue.

1. Justifier qu'il s'agit bien de la répétition de 3 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, et préciser p .
2. Calculer $P(X = 0)$.
3. Calculer $P(X = 3)$.
4. Calculer $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.
5. Recopier et compléter le tableau suivant, appelé **loi de probabilité** de X . Vérifier que la somme de la dernière ligne vaut 1.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$				