

Proportions, pourcentages et évolutions

Mathématiques – Première (enseignement scientifique)

Fiche de cours et automatismes

Table des matières

1	Proportion et pourcentage	1
1.1	Définition	1
1.2	Proportion d'une proportion	2
2	Taux d'évolution	3
3	Coefficient multiplicateur	4
4	Évolutions successives	5
5	Évolution réciproque	6

Introduction

Les pourcentages sont le langage courant de l'information chiffrée : ils servent à comparer des populations de tailles différentes, à décrire une évolution, à annoncer une hausse ou une baisse. Ils sont aussi, pour la même raison, l'un des outils les plus souvent mal employés dans les médias.

Cette fiche regroupe l'essentiel de ce qu'il faut savoir faire *sans hésiter* : calculer une proportion, appliquer un taux d'évolution, enchaîner plusieurs évolutions et revenir en arrière. Ces quatre capacités font partie des **automatismes** du programme : elles ne font pas l'objet d'un chapitre isolé mais doivent être entretenues toute l'année, et elles interviennent dans toutes les autres parties du cours (statistiques, probabilités, suites, fonctions exponentielles).

1 Proportion et pourcentage

1.1 Définition

Définition 1.1: Proportion

Soit E une population de référence contenant n_E éléments, et A une sous-population de E contenant n_A éléments. La **proportion** des éléments de A dans E est le quotient

$$p = \frac{n_A}{n_E}.$$

C'est un nombre compris entre 0 et 1.

Notation 1.2: Écriture en pourcentage

Exprimer une proportion **en pourcentage**, c'est ramener l'effectif de référence à 100 : on multiplie la proportion par 100.

$$p = \frac{n_A}{n_E} \quad \Longleftrightarrow \quad p \times 100 \%$$

Dire que 36 % de la population française est du groupe sanguin O+ signifie que la proportion

des personnes de ce groupe est $\frac{36}{100} = 0,36$.

Méthode 1.3: Les trois questions possibles

Une proportion relie trois nombres : n_A , n_E et p . Connaissant deux d'entre eux, on obtient le troisième.

- **Calculer la proportion** : $p = \frac{n_A}{n_E}$.
- **Calculer la sous-population** : $n_A = p \times n_E$.
- **Retrouver la population totale** : $n_E = \frac{n_A}{p}$.

Le réflexe : identifier d'abord *qui est la population de référence*, c'est-à-dire ce qui joue le rôle du « tout ».

Exemple 1.4: Les trois situations

a) Dans une classe de 25 élèves, 11 ont moins de 15 ans. La proportion d'élèves de moins de 15 ans est

$$p = \frac{11}{25} = 0,44, \quad \text{soit} \quad 0,44 \times 100 = 44 \% \text{ des élèves.}$$

b) Dans un lycée de 1 200 élèves, 15 % sont internes. Le nombre d'internes est

$$n_A = \frac{15}{100} \times 1\,200 = 180 \text{ élèves.}$$

c) Dans une entreprise, 30 % des salariés partent en vacances en juillet, ce qui représente 150 employés. L'effectif total est

$$n_E = \frac{150}{0,30} = \frac{150 \times 100}{30} = 500 \text{ salariés.}$$

1.2 Proportion d'une proportion

Propriété 1.5: Proportion d'une proportion

Soit B une sous-population de A , elle-même sous-population de E . Si p_1 est la proportion de B dans A et p_2 la proportion de A dans E , alors la proportion p de B dans E est le **produit** des deux proportions :

$$p = p_1 \times p_2.$$

Démonstration. Par définition, $p_1 = \frac{n_B}{n_A}$ et $p_2 = \frac{n_A}{n_E}$. Donc

$$p_1 \times p_2 = \frac{n_B}{n_A} \times \frac{n_A}{n_E} = \frac{n_B}{n_E} = p. \quad \square$$

Exemple 1.6: Deux pourcentages qui se multiplient

Un lycée compte 35 % d'élèves de seconde, parmi lesquels 40 % étudient l'italien en LV2. La proportion d'élèves du lycée qui sont en seconde *et* étudient l'italien est

$$p = \frac{40}{100} \times \frac{35}{100} = \frac{1\,400}{10\,000} = 0,14, \quad \text{soit} \quad 14 \%.$$

Remarque : Deux erreurs classiques

- **On ne multiplie pas les pourcentages entre eux « comme des nombres » :** $40\% \times 35\%$ ne fait pas $1\,400\%$. On multiplie les *proportions* ($0,4 \times 0,35 = 0,14$), puis on repasse en pourcentage.
- **On ne peut additionner deux pourcentages que s'ils portent sur la même population de référence.** Si 42% des Français ont le groupe sanguin O et que, parmi eux, 14% sont de Rhésus négatif, la proportion de Français O – est $0,42 \times 0,14 = 0,0588$, c'est-à-dire **5,88 %** de la population – et non $0,0588\%$ ni 56% .

Exercice 1.7: Proportions emboîtées

Dans un lycée, 60% des élèves sont des filles. Parmi les filles, 25% sont demi-pensionnaires. Le lycée compte 840 élèves.

1. Quelle proportion des élèves du lycée sont des filles demi-pensionnaires ? Exprimer le résultat en pourcentage.
2. Combien cela représente-t-il d'élèves ?

Correction

1. Les deux proportions s'enchaînent : la proportion cherchée est le produit

$$p = 0,60 \times 0,25 = 0,15, \quad \text{soit } 15\%.$$

2. $n_A = 0,15 \times 840 = 126$ élèves. (On peut vérifier : il y a $0,6 \times 840 = 504$ filles, dont $0,25 \times 504 = 126$ demi-pensionnaires.)

2 Taux d'évolution**Définition 2.1: Variation absolue, variation relative**

Une quantité passe d'une valeur initiale V_i à une valeur finale V_f (avec $V_i \neq 0$).

- La **variation absolue** est la différence $V_f - V_i$. Elle s'exprime dans l'unité de la grandeur (euros, habitants, degrés...).
- La **variation relative**, ou **taux d'évolution**, est le quotient

$$t = \frac{V_f - V_i}{V_i}.$$

C'est un nombre sans unité, que l'on exprime le plus souvent en pourcentage.

Remarque : Signe du taux

Si $t > 0$, il s'agit d'une **augmentation** ; si $t < 0$, d'une **diminution** ; si $t = 0$, la quantité n'a pas changé.

Exemple 2.2: Calculer un taux d'évolution

Une quantité passe de 9 à 12,6. La variation absolue est $12,6 - 9 = 3,6$, et le taux d'évolution est

$$t = \frac{12,6 - 9}{9} = \frac{3,6}{9} = 0,4, \quad \text{soit une hausse de } 40\%.$$

Remarque : Pourcentage ou point de pourcentage ?

Si le taux de chômage passe de 8 % à 10 %, il augmente de **2 points** de pourcentage, mais son *taux d'évolution* est

$$t = \frac{10 - 8}{8} = 0,25, \quad \text{soit une hausse de 25 \%}.$$

Les deux formulations sont correctes mais ne disent pas la même chose : c'est une confusion très fréquente dans les médias, et un bon réflexe d'esprit critique que de les distinguer.

3 Coefficient multiplicateur**Définition 3.1: Coefficient multiplicateur**

Le **coefficient multiplicateur** associé à l'évolution de V_i à V_f est le nombre

$$CM = \frac{V_f}{V_i}, \quad \text{de sorte que} \quad V_f = CM \times V_i.$$

Propriété 3.2: Lien entre taux et coefficient multiplicateur

Le coefficient multiplicateur et le taux d'évolution sont liés par

$$\boxed{CM = 1 + t} \quad \text{et donc} \quad t = CM - 1.$$

En particulier : $CM > 1$ pour une augmentation, $CM < 1$ pour une diminution.

Démonstration. Par définition du taux d'évolution,

$$t = \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_f}{V_i} - \frac{V_i}{V_i} = CM - 1,$$

d'où $CM = 1 + t$. □

Propriété 3.3: Appliquer un taux d'évolution

Si une quantité V_i subit une évolution de taux t , alors

$$V_f = (1 + t) \times V_i \quad \text{et} \quad V_i = \frac{V_f}{1 + t}.$$

Méthode 3.4: Passer du taux au coefficient, et réciproquement

- Augmentation de $x\%$: $CM = 1 + \frac{x}{100}$.
- Diminution de $x\%$: $CM = 1 - \frac{x}{100}$.
- Dans l'autre sens, on calcule $t = CM - 1$, puis on multiplie par 100 pour l'exprimer en pourcentage.

Évolution	+20 %	+4 %	-6 %	-30 %	+50 %	-12 %
Taux t	0,20	0,04	-0,06	-0,30	0,50	-0,12
$CM = 1 + t$	1,2	1,04	0,94	0,7	1,5	0,88

Remarque : Ne pas confondre t et CM

Une baisse de 10 % correspond à un **taux** $t = -0,1$ et à un **coefficient multiplicateur** $CM = 1 - 0,1 = 0,9$. Le taux est *négalif*, le coefficient est *positif et inférieur à 1* : ce sont deux nombres différents, qui ne se lisent pas de la même façon.

Exercice 3.5: Taux et coefficients

1. Un article coûtant 80 € augmente de 15 %. Quel est son nouveau prix ?
2. Après une baisse de 20 %, un article coûte 52 €. Quel était son prix initial ?
3. Le coefficient multiplicateur d'une évolution vaut 0,94. Quel est le taux d'évolution correspondant ?

Correction

1. $CM = 1 + 0,15 = 1,15$, donc $V_f = 1,15 \times 80 = 92$ €.
2. $CM = 1 - 0,20 = 0,80$, donc $V_i = \frac{52}{0,80} = 65$ €. (*Attention : il ne faut surtout pas augmenter 52 de 20 %, ce qui donnerait 62,40 € – voir la partie sur l'évolution réciproque.*)
3. $t = CM - 1 = 0,94 - 1 = -0,06$, soit une baisse de 6 %.

4 Évolutions successives**Propriété 4.1: Coefficient multiplicateur global**

Lorsqu'une quantité subit deux évolutions successives, de coefficients multiplicateurs CM_1 puis CM_2 , le coefficient multiplicateur **global** est le produit

$$CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2,$$

et le taux d'évolution global est $t_{\text{global}} = CM_{\text{global}} - 1$.

Le résultat se généralise à un nombre quelconque d'évolutions successives : $CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2 \times \dots \times CM_n$.

Démonstration. Après la première évolution, la quantité vaut $V' = CM_1 \times V_i$. Après la seconde, elle vaut

$$V_f = CM_2 \times V' = CM_2 \times (CM_1 \times V_i) = (CM_1 \times CM_2) \times V_i,$$

ce qui est bien la définition d'un coefficient multiplicateur global égal à $CM_1 \times CM_2$. $\square$

Méthode 4.2: Calculer un taux global

1. Traduire chaque évolution en coefficient multiplicateur.
2. Multiplier tous les coefficients entre eux.
3. Revenir au taux global par $t = CM_{\text{global}} - 1$, et conclure par une phrase (hausse ou baisse, et de combien).

Exemple 4.3: Une hausse puis une baisse

Un commerçant augmente ses prix de 20 %, puis les solde à -30 %.

$$CM_1 = 1,2 \quad CM_2 = 0,7 \quad CM_{\text{global}} = 1,2 \times 0,7 = 0,84.$$

Donc $t = 0,84 - 1 = -0,16$: les prix ont globalement **baissé de 16 %**.

Remarque : Les taux ne s'additionnent pas

Dans l'exemple ci-dessus, $+20\%$ suivi de -30% ne donne *pas* -10% , mais -16% . C'est le résultat le plus contre-intuitif du chapitre, et le plus utile : **les coefficients multiplicateurs se multiplient, les taux ne s'additionnent pas.**

Autre conséquence : une hausse de 10% suivie d'une baisse de 10% ne ramène pas au prix de départ, puisque $1,1 \times 0,9 = 0,99$, soit une baisse globale de 1% .

Exercice 4.4: Trois évolutions successives

La population d'une commune a augmenté de 5% en 2023, de 2% en 2024, puis a diminué de 4% en 2025.

1. Calculer le coefficient multiplicateur global sur les trois années.
2. En déduire le taux d'évolution global, arrondi à $0,1\%$ près. La population a-t-elle augmenté ou diminué ?
3. Sachant qu'elle comptait 8 000 habitants début 2023, combien en compte-t-elle fin 2025 ?

Correction

1. $CM_{\text{global}} = 1,05 \times 1,02 \times 0,96 = 1,028\,16$.
2. $t = 1,028\,16 - 1 = 0,028\,16 \approx 0,028$, soit une **hausse d'environ $2,8\%$** sur les trois années. (Et non $5 + 2 - 4 = 3\%$.)
3. $V_f = 1,028\,16 \times 8\,000 = 8\,225,28$, soit environ 8 225 habitants.

5 Évolution réciproque

Définition 5.1: Évolution réciproque

Une quantité évolue de V_i à V_f . L'**évolution réciproque** est celle qui ramène V_f à V_i .

Propriété 5.2: Coefficient de l'évolution réciproque

Si une évolution a pour coefficient multiplicateur CM (non nul), alors son évolution réciproque a pour coefficient multiplicateur

$$CM' = \frac{1}{CM}.$$

Autrement dit, deux évolutions de coefficients CM_1 et CM_2 sont réciproques l'une de l'autre si et seulement si $CM_1 \times CM_2 = 1$.

Démonstration. On a $V_f = CM \times V_i$, donc $V_i = \frac{1}{CM} \times V_f$: le passage de V_f à V_i se fait bien en multipliant par $\frac{1}{CM}$. Le coefficient global des deux évolutions enchaînées vaut alors $CM \times \frac{1}{CM} = 1$, ce qui correspond à un taux global nul : on est revenu au point de départ. $\square$

Exemple 5.3: Annuler une hausse

Un marchand a augmenté un prix de 20% et souhaite revenir au prix d'origine. Quelle réduction doit-il appliquer ?

$$CM = 1,2 \quad \text{donc} \quad CM' = \frac{1}{1,2} \approx 0,833.$$

Le taux réciproque est $t' = 0,833 - 1 = -0,167$: il doit accorder une remise d'environ **16,7%**, et non de 20 %.

Exercice 5.4: Retour au prix initial

Pendant les soldes, un article est vendu avec une remise de 40 %. À la fin des soldes, le commerçant souhaite revenir au prix initial.

1. De quel pourcentage doit-il augmenter le prix soldé ? Arrondir à 0,1 % près.
2. Vérifier le résultat sur un article dont le prix initial était de 50 €.

Correction

1. La remise correspond à $CM = 1 - 0,40 = 0,6$. L'évolution réciproque a pour coefficient

$$CM' = \frac{1}{0,6} \approx 1,667, \quad \text{donc} \quad t' \approx 0,667.$$

Il doit augmenter le prix soldé d'environ 66,7 %.

2. Prix soldé : $0,6 \times 50 = 30$ €. En augmentant de 66,7 % : $30 \times 1,667 = 50,01 \approx 50$ €. On retrouve bien le prix initial.

Bilan

Les quatre automatismes à maîtriser :

- **appliquer un taux d'évolution** pour calculer une valeur finale ($V_f = (1 + t)V_i$) ou initiale ($V_i = V_f/(1 + t)$) ;
- **calculer un taux d'évolution** et l'exprimer en pourcentage : $t = \frac{V_f - V_i}{V_i}$;
- **calculer le taux équivalent à plusieurs évolutions successives** : on multiplie les coefficients, $CM = CM_1 \times CM_2 \times \dots$, puis $t = CM - 1$;
- **calculer un taux d'évolution réciproque** : $CM' = \frac{1}{CM}$, puis $t' = CM' - 1$.

Et les deux réflexes qui évitent la majorité des erreurs : **les taux ne s'additionnent pas** (les coefficients se multiplient), et une **proportion n'a de sens que rapportée à sa population de référence**.