Travail de groupe

Tableaux croisés, arbres pondérés, indépendance

1ère mathématiques spécifiques

Calculatrice non autorisée. Les résultats peuvent être laissés sous forme de fractions irréductibles.

Exercice 1: La qualité de l'eau

Une étude a été réalisée sur la qualité de l'eau dans une région, en prélevant des échantillons dans deux types de milieux : des rivières et des lacs. Chaque échantillon a ensuite été analysé et classé comme de qualité « satisfaisante » ou « insatisfaisante » selon les normes en vigueur.

Voici les données recueillies à partir d'un total de 500 échantillons analysés :

— 300 échantillons provenaient de rivières ;
— parmi les échantillons prélevés dans les lacs, 80 étaient classés de qualité « insatisfaisante » ;
— au total, 280 échantillons étaient classés de qualité « satisfaisante ».

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Rivière	**Lac**	**Total**
Qualité satisfaisante			
Qualité insatisfaisante			
Total			500

2. On choisit un échantillon d'eau au hasard parmi les 500 échantillons analysés.

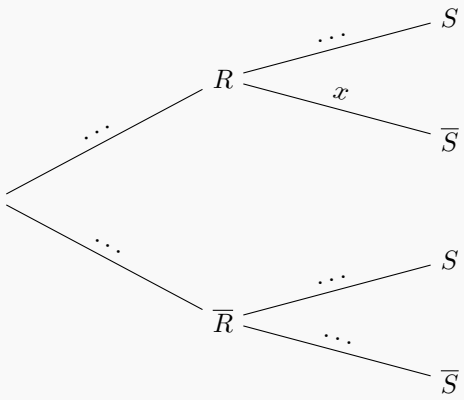
   Soit S l'évènement : « l'échantillon choisi est classé de qualité satisfaisante » ;

   Soit R l'évènement : « l'échantillon choisi provient d'une rivière ».

   Pour un évènement quelconque E, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E et $P(E)$ la probabilité de E. On donnera les résultats sous forme de fraction.

   (a) Quelle est la probabilité que l'échantillon provienne d'une rivière ?
   (b) Décrire l'évènement $\overline{S}$ par une phrase puis justifier que $P\left(\overline{S}\right) = \dfrac{11}{25}$.
   (c) Calculer $P\left(S \cap \overline{R}\right)$, puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

3. La situation est représentée par l'arbre pondéré ci-dessous :



(a) Traduire la probabilité x en utilisant les évènements $\overline{S}$ et R.

(b) Vérifier que $x = \dfrac{7}{15}$.

(c) Recopier et compléter entièrement l'arbre.

4. Les évènements « l'échantillon provient d'une rivière » et « l'échantillon est de qualité insatisfaisante » sont-ils indépendants ?

Correction de l'exercice 1

1. On complète le tableau par différences : lacs $= 500 - 300 = 200$; lacs satisfaisants $= 200 - 80 = 120$; rivières satisfaisantes $= 280 - 120 = 160$; rivières insatisfaisantes $= 300 - 160 = 140$; insatisfaisants $= 500 - 280 = 220$.

	Rivière	**Lac**	**Total**
Qualité satisfaisante	160	120	280
Qualité insatisfaisante	140	80	220
Total	300	200	500

2. Le choix se fait au hasard : on est en situation d'équiprobabilité.

(a) $P(R) = \dfrac{300}{500} = \dfrac{3}{5}$.

La probabilité que l'échantillon provienne d'une rivière est de $\dfrac{3}{5}$.

(b) $\overline{S}$: « l'échantillon choisi est classé de qualité insatisfaisante ».

$$P\left(\overline{S}\right) = \frac{220}{500} = \frac{10 \times 2 \times 11}{10 \times 2 \times 25} = \frac{11}{25}.$$

(c) $S \cap \overline{R}$ est l'évènement « l'échantillon est de qualité satisfaisante et provient d'un lac ».

$$P\left(S \cap \overline{R}\right) = \frac{120}{500} = \frac{10 \times 2 \times 6}{10 \times 2 \times 25} = \frac{6}{25}.$$

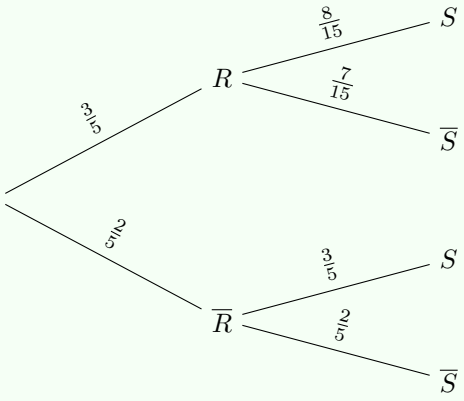
La probabilité que l'échantillon choisi provienne d'un lac et soit de qualité satisfaisante est égale à $\dfrac{6}{25}$.

3. (a) $x = P_R\left(\overline{S}\right)$ est la probabilité que l'échantillon soit de qualité insatisfaisante sachant qu'il provient d'une rivière.

(b) Parmi les 300 échantillons provenant d'une rivière, 140 sont de qualité insatisfaisante :

$$x = P_R\left(\overline{S}\right) = \frac{140}{300} = \frac{10 \times 2 \times 7}{10 \times 2 \times 15} = \frac{7}{15}.$$

(c) $P\left(\overline{R}\right) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$; $P_R(S) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$; $P_{\overline{R}}(S) = \frac{120}{200} = \frac{3}{5}$ et $P_{\overline{R}}\left(\overline{S}\right) = \frac{80}{200} = \frac{2}{5}$.



4. Les évènements R et $\overline{S}$ sont indépendants si et seulement si $P\left(R \cap \overline{S}\right) = P(R) \times P\left(\overline{S}\right)$.

   D'une part $P\left(R \cap \overline{S}\right) = \frac{140}{500} = \frac{7}{25} = \frac{35}{125}$; d'autre part $P(R) \times P\left(\overline{S}\right) = \frac{3}{5} \times \frac{11}{25} = \frac{33}{125}$.

   Comme $\frac{35}{125} \neq \frac{33}{125}$, l'égalité n'est pas vérifiée.

   Les évènements « l'échantillon provient d'une rivière » et « l'échantillon est de qualité insatisfaisante » ne sont **pas indépendants**.