

Travail de groupe

Arbres pondérés, probabilités conditionnelles, tableaux croisés

1ère mathématiques spécifiques

Calculatrice non autorisée. Les résultats peuvent être laissés sous forme de fractions irréductibles.

Exercice 1: L'association sportive

L'association sportive d'un lycée propose deux activités : le badminton et l'escalade. Chaque inscrit pratique une seule de ces deux activités.

- 60 % des inscrits font du badminton, les autres font de l'escalade ;
- parmi ceux qui font du badminton, 25 % participent aux compétitions ;
- parmi ceux qui font de l'escalade, 50 % participent aux compétitions.

On choisit un inscrit au hasard.

Soit B l'évènement : « l'inscrit choisi fait du badminton » ;

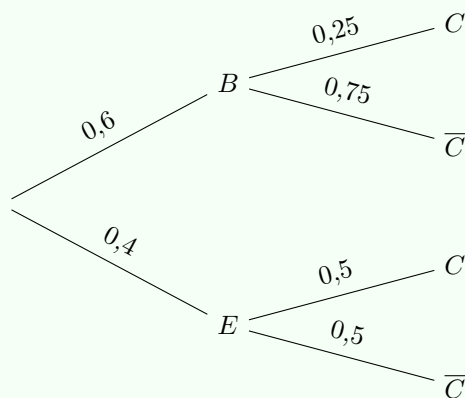
Soit E l'évènement : « l'inscrit choisi fait de l'escalade » ;

Soit C l'évènement : « l'inscrit choisi participe aux compétitions ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $P(B \cap C)$ et traduire ce résultat par une phrase.
3. Calculer $P(E \cap C)$.
4. En déduire la probabilité que l'inscrit participe aux compétitions.
5. L'inscrit choisi participe aux compétitions. Quelle est la probabilité qu'il fasse du badminton ?

Correction de l'exercice 1

1. Arbre pondéré :



2. $P(B \cap C) = P(B) \times P_B(C) = 0,6 \times 0,25 = 0,15$.

La probabilité que l'inscrit fasse du badminton *et* participe aux compétitions est de 0,15 : 15 % des inscrits sont des compétiteurs de badminton.

3. $P(E \cap C) = P(E) \times P_E(C) = 0,4 \times 0,5 = 0,2$.

4. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(B \cap C) + P(E \cap C) = 0,15 + 0,2 = 0,35.$$

5. On cherche $P_C(B)$:

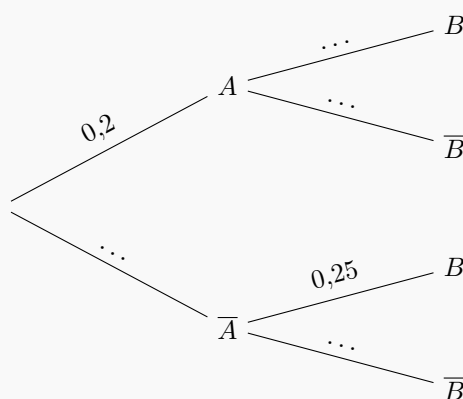
$$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{0,15}{0,35} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}.$$

La probabilité qu'un compétiteur fasse du badminton est de $\frac{3}{7}$.

Remarque : $P_C(B) = \frac{3}{7}$ et $P_B(C) = 0,25$ ne sont pas égales, car elles ne répondent pas à la même question.

Exercice 2: Un arbre à compléter

On considère deux événements A et B . La situation est représentée par l'arbre pondéré incomplet ci-dessous.



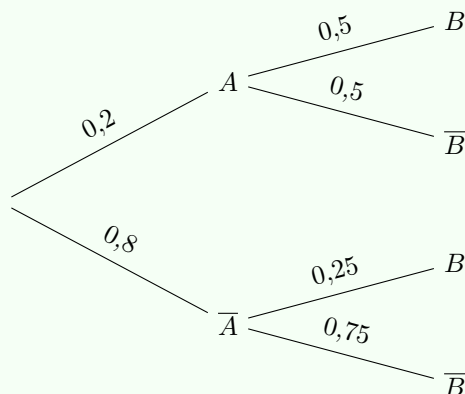
On sait de plus que $P(A \cap B) = 0,1$.

1. Déterminer $P(\bar{A})$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B})$.
2. Déterminer $P_A(B)$, puis $P_A(\bar{B})$. Recopier et compléter l'arbre.
3. Calculer $P(\bar{A} \cap B)$, puis $P(B)$.
4. Calculer $P_B(A)$.

Correction de l'exercice 2

1. $P(\bar{A}) = 1 - 0,2 = 0,8$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - 0,25 = 0,75$.
2. On sait que $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, donc

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,2} = 0,5 \quad \text{et} \quad P_A(\bar{B}) = 1 - 0,5 = 0,5.$$



3. $P(\bar{A} \cap B) = 0,8 \times 0,25 = 0,2.$

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,1 + 0,2 = 0,3.$$

4.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 3: La sortie de fin d'année

Pour la sortie de fin d'année, les 200 élèves de seconde et de première d'un lycée doivent choisir entre trois activités : théâtre, musée ou cinéma. Chaque élève choisit une seule activité. Les résultats sont donnés dans le tableau incomplet suivant.

	Théâtre	Musée	Cinéma	Total
Seconde	20		40	80
Première	30	60		
Total		80	70	200

On choisit un élève au hasard parmi les 200.

Soit S l'évènement : « l'élève choisi est en seconde » ;

Soit C l'évènement : « l'élève choisi a opté pour le cinéma ».

- Recopier et compléter le tableau.
- Calculer les fréquences marginales des trois activités, c'est-à-dire les fréquences calculées sur l'ensemble des 200 élèves.
- Calculer les fréquences des trois activités parmi les élèves de seconde.
 - Calculer les fréquences des trois activités parmi les élèves de première.
 - Le niveau de classe semble-t-il influencer sur le choix de l'activité ? Justifier par une phrase.
- Calculer $P(S)$ et $P(S \cap C)$.
 - Calculer $P_S(C)$ et traduire ce résultat par une phrase.
 - Calculer $P_C(S)$. Pourquoi ce résultat est-il différent du précédent ?

Correction de l'exercice 3

1. Seconde, musée : $80 - 20 - 40 = 20$. Première, total : $200 - 80 = 120$. Première, cinéma : $120 - 30 - 60 = 30$. Total théâtre : $20 + 30 = 50$.

	Théâtre	Musée	Cinéma	Total
Seconde	20	20	40	80
Première	30	60	30	120
Total	50	80	70	200

Vérification : $50 + 80 + 70 = 200$ et $40 + 30 = 70$.

2.

$$f(\text{théâtre}) = \frac{50}{200} = 0,25 \quad f(\text{musée}) = \frac{80}{200} = 0,4 \quad f(\text{cinéma}) = \frac{70}{200} = 0,35$$

La somme vaut bien $0,25 + 0,4 + 0,35 = 1$.

3. (a) Parmi les 80 élèves de seconde :

$$\frac{20}{80} = 0,25 \quad \frac{20}{80} = 0,25 \quad \frac{40}{80} = 0,5$$

- (b) Parmi les 120 élèves de première :

$$\frac{30}{120} = 0,25 \quad \frac{60}{120} = 0,5 \quad \frac{30}{120} = 0,25$$

- (c) Oui : la moitié des élèves de seconde ont choisi le cinéma, alors que la moitié des élèves de première ont choisi le musée. En revanche, la part du théâtre est la même (25 %) dans les deux niveaux.

4. (a) $P(S) = \frac{80}{200} = 0,4$ et $P(S \cap C) = \frac{40}{200} = 0,2$.

(b)

$$P_S(C) = \frac{P(S \cap C)}{P(S)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5.$$

La probabilité qu'un élève ait choisi le cinéma, sachant qu'il est en seconde, est de 0,5. On retrouve la fréquence conditionnelle de la question 3.a.

- (c) Cette fois, la population de référence est l'ensemble des 70 élèves ayant choisi le cinéma :

$$P_C(S) = \frac{P(S \cap C)}{P(C)} = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}.$$

Les deux résultats sont différents car le dénominateur change : $P_S(C)$ est la proportion de « cinéma » parmi les secondes (40 sur 80), alors que $P_C(S)$ est la proportion de secondes parmi les « cinéma » (40 sur 70).

Exercice 4: Le bus du matin

Dans une ville, la probabilité qu'il pleuve un matin donné est de 0,3. Lorsqu'il pleut, le bus du matin est en retard avec une probabilité de 0,5 ; lorsqu'il ne pleut pas, il est en retard avec une probabilité de 0,1.

On choisit un matin au hasard.

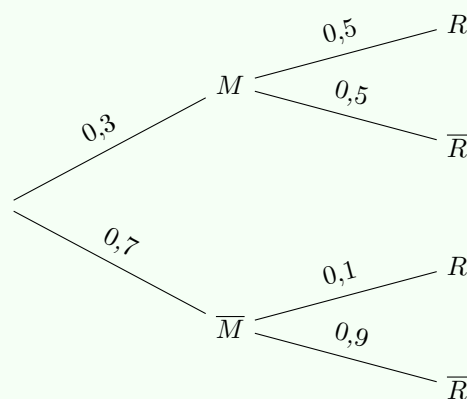
Soit M l'évènement : « il pleut le matin choisi » ;

Soit R l'évènement : « le bus est en retard le matin choisi ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $P(M \cap R)$.
3. Montrer que $P(R) = 0,22$.
4. Ce matin, le bus est en retard. Quelle est la probabilité qu'il pleuve ? Comparer avec $P(M)$.

Correction de l'exercice 4

1. Arbre pondéré :



2. $P(M \cap R) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$.
3. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(M \cap R) + P(\overline{M} \cap R) = 0,15 + 0,7 \times 0,1 = 0,15 + 0,07 = 0,22.$$

4. On cherche $P_R(M)$:

$$P_R(M) = \frac{P(M \cap R)}{P(R)} = \frac{0,15}{0,22} = \frac{15}{22}.$$

Or $\frac{15}{22} > \frac{11}{22} = \frac{1}{2}$, donc $P_R(M) > 0,5$ alors que $P(M) = 0,3$.

Sans information, il pleut moins d'un matin sur trois ; mais quand on sait que le bus est en retard, il y a plus d'une chance sur deux qu'il pleuve.