Suites numériques

Mathématiques – Première (enseignement scientifique)

Croissance linéaire et croissance exponentielle

Table des matières

1 Généralités sur les suites **2**
1.1 Définition et notations . . . 2
1.2 Suite définie de façon explicite . . . 2
1.3 Suite définie par récurrence . . . 3
1.4 Représentation graphique . . . 4
1.5 Sens de variation . . . 4

2 Suites arithmétiques : la croissance linéaire **5**
2.1 Définition . . . 5
2.2 Terme de rang n . . . 5
2.3 Sens de variation et représentation graphique . . . 6
2.4 Problème de seuil . . . 6

3 Suites géométriques : la croissance exponentielle **7**
3.1 Définition . . . 7
3.2 Terme de rang n . . . 8
3.3 Sens de variation et représentation graphique . . . 8
3.4 Problème de seuil . . . 9

4 Comparer croissance linéaire et croissance exponentielle **10**

Introduction

Beaucoup de phénomènes s'observent à intervalles réguliers : le prix payé après chaque séance de cinéma, la population d'une ville chaque année, le chiffre d'affaires d'une entreprise, la masse d'un produit radioactif chaque jour… On obtient alors une **liste ordonnée de nombres** : 1$^{\text{er}}$ nombre, 2$^{\text{e}}$ nombre, 3$^{\text{e}}$ nombre, etc. C'est ce qu'on appelle une **suite**.

Deux grandes façons d'évoluer reviennent sans cesse :

— on **ajoute toujours la même quantité** (par exemple +4 € à chaque séance) : c'est une **croissance linéaire**, modélisée par une **suite arithmétique** ;
— on **multiplie toujours par le même nombre** (par exemple +10 % par an, c'est-à-dire ×1,1) : c'est une **croissance exponentielle**, modélisée par une **suite géométrique**.

L'objectif du chapitre est de savoir reconnaître ces deux modèles, de calculer n'importe quel terme, d'étudier leur sens de variation, de les représenter, et de répondre à la question qu'on se pose le plus souvent en pratique : *à partir de quand* un seuil sera-t-il dépassé ?

1 Généralités sur les suites

1.1 Définition et notations

Définition 1.1: Suite numérique

Une **suite numérique** u est une fonction qui, à tout entier naturel n, associe un nombre réel noté $u(n)$.

- Le nombre $u(n)$ est appelé **terme de rang** n (ou terme d'indice n) de la suite.
- On note aussi ce terme u_n (on lit « u indice n ») et on note la suite u ou (u_n).
- Le premier terme est en général $u(0)$, appelé **terme initial** ; certaines suites ne commencent qu'au rang 1 (premier terme $u(1)$).

Remarque : Ne pas confondre (u_n) et u_n

(u_n), avec parenthèses, désigne *toute la suite* (la liste entière) ; u_n, sans parenthèses, désigne *un seul nombre* : le terme de rang n.

De même, $u(n+1)$ est le terme *qui suit* $u(n)$, alors que $u(n)+1$ est le terme $u(n)$ auquel on a ajouté 1 : ce n'est pas du tout la même chose.

Une suite peut être donnée de deux façons : par une **formule explicite** ou par une **relation de récurrence**.

1.2 Suite définie de façon explicite

Définition 1.2: Formule explicite

Une suite est définie de façon **explicite** lorsque $u(n)$ est donné directement en fonction de n, par une formule du type $u(n) = f(n)$.

On peut alors calculer **directement** n'importe quel terme, en remplaçant n par sa valeur.

Exemple 1.3: Calculer des termes

Soit la suite u définie pour tout entier naturel n par $u(n) = 2n - 3$.

$$u(0) = 2 \times 0 - 3 = -3, \qquad u(1) = 2 \times 1 - 3 = -1, \qquad u(2) = 1, \qquad u(3) = 3,$$

et, directement, $u(100) = 2 \times 100 - 3 = 197$.

L'expression de $u(n)$ ressemble à celle de la fonction affine $f(x) = 2x - 3$; la seule différence est qu'ici la variable n est un entier naturel.

Méthode 1.4: Modéliser une situation par une formule explicite

Situation. Idir va au cinéma. Il a acheté une carte d'abonnement à 15 €, et chaque séance lui coûte ensuite 4 €. On note $u(n)$ le prix total payé par Idir pour n séances.

1. **Calculer à la main quelques cas, en écrivant le calcul.**
   Pour 5 séances : $15 + 4 \times 5 = 35$ €. Ce nombre correspond au terme $u(5)$: $u(5) = 35$.
   $u(3) = 15 + 4 \times 3 = 27$: c'est le prix total payé pour 3 séances.
   $u(10) = 15 + 4 \times 10 = 55$: c'est le prix total payé pour 10 séances.
2. **Repérer ce qui change et ce qui ne change pas.** Le 15 ne bouge jamais ; seul le nombre de séances change.
3. **Remplacer le nombre qui change par n.** Pour n séances, Idir paie $15 + 4 \times n$ euros,

donc

$$u(n) = 15 + 4n \qquad \text{pour tout entier naturel } n.$$

4. **Vérifier** la formule sur un cas déjà calculé : $u(5) = 15 + 4 \times 5 = 35$. ✓

1.3 Suite définie par récurrence

Définition 1.5: Relation de récurrence

Une suite est définie **par récurrence** lorsqu'on donne :

- son **terme initial** (par exemple $u(0)$) ;
- une **relation** qui permet de calculer chaque terme à partir du **terme précédent** : $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$.

Exemple 1.6: Calculer des termes de proche en proche

Soit la suite u définie par $u(0) = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u(n+1) = 2u(n) - 3$.

$$u(1) = 2 \times u(0) - 3 = 2 \times 1 - 3 = -1$$
$$u(2) = 2 \times u(1) - 3 = 2 \times (-1) - 3 = -5$$
$$u(3) = 2 \times u(2) - 3 = 2 \times (-5) - 3 = -13$$

Remarque : Pas de raccourci

Pour une suite définie par récurrence, on ne peut *pas* calculer $u(10)$ directement : il faut calculer tous les termes qui précèdent. Pour éviter les calculs fastidieux, on utilise le **tableur** (on recopie une formule vers le bas), le mode **suite** de la calculatrice, ou un **programme Python**.

Méthode 1.7: Modéliser une situation par une relation de récurrence

Situation. Le chiffre d'affaires d'une entreprise de téléphonie mobile augmente de 10 % chaque année. En 2018, il était de 500 000 €. On note $C(n)$ le chiffre d'affaires de l'année $2018 + n$.

1. **Identifier le terme initial.** $C(0)$ correspond à l'année $2018 + 0 = 2018$: $C(0) = 500\,000$.
2. **Calculer les premiers termes en écrivant le calcul.** Augmenter de 10 %, c'est multiplier par $1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$:

   $$C(1) = 500\,000 \times 1{,}1 = 550\,000.$$

   En 2019, le chiffre d'affaires est de 550 000 €. Puis $C(2) = 550\,000 \times 1{,}1 = 605\,000$ (en 2020) et $C(3) = 605\,000 \times 1{,}1 = 665\,500$ (en 2021).
3. **Constater qu'on part toujours du terme précédent.** Pour calculer $C(10)$ « à la main », il faudrait connaître $C(9)$, donc $C(8)$, etc.
4. **Écrire la relation** qui fait passer d'une année à la suivante :

   $$C(n+1) = 1{,}1 \times C(n) \qquad \text{pour tout entier naturel } n, \quad \text{avec } C(0) = 500\,000.$$

1.4 Représentation graphique

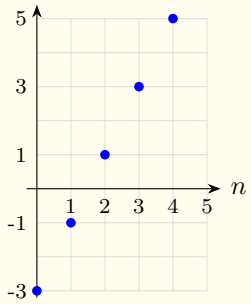
Définition 1.8: Représentation graphique d'une suite

Dans un repère, la **représentation graphique** d'une suite u est l'ensemble des points de coordonnées $(n\,;\,u(n))$.

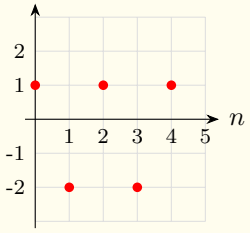
C'est un **nuage de points isolés** : on ne relie pas les points, car n ne prend que des valeurs entières.

Exemple 1.9: Deux nuages de points

$u(n) = 2n - 3$: points $(0;-3)$, $(1;-1)$, $(2;1)$, $(3;3)$, $(4;5)$.



$v(0) = 1$, $v(n+1) = v(n)^2 - 3$: points $(0;1)$, $(1;-2)$, $(2;1)$, $(3;-2)$, $(4;1)$.



1.5 Sens de variation

Définition 1.10: Suite croissante, décroissante

Soit u une suite.

- u est **croissante** si chaque terme est supérieur ou égal au précédent : pour tout n, $u(n+1) \geqslant u(n)$.
- u est **décroissante** si chaque terme est inférieur ou égal au précédent : pour tout n, $u(n+1) \leqslant u(n)$.
- u est **constante** si pour tout n, $u(n+1) = u(n)$.

Avec des inégalités strictes, on dit *strictement* croissante ou *strictement* décroissante. Une suite qui n'est ni croissante ni décroissante est dite **non monotone**.

Méthode 1.11: Étudier le sens de variation

On calcule la différence $u(n+1) - u(n)$ et on étudie son **signe** :

- si $u(n+1) - u(n) \geqslant 0$ pour tout n, alors $u(n+1) \geqslant u(n)$: la suite est **croissante** ;
- si $u(n+1) - u(n) \leqslant 0$ pour tout n, alors $u(n+1) \leqslant u(n)$: la suite est **décroissante**.

Calculer les premiers termes permet de *conjecturer* le sens de variation, mais ne le *démontre* pas.

Exemple 1.12: Trois cas

1. $u(n) = n^2$. On a $u(n+1) - u(n) = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$. Comme $n \geqslant 0$, on a $2n + 1 > 0$: la suite u est strictement croissante.
2. $v(0) = 10$ et $v(n+1) = v(n) - 2$. On a $v(n+1) - v(n) = -2 < 0$: la suite v est strictement décroissante.
3. $w(n) = (-1)^n$. Les termes valent 1, -1, 1, $-1\ldots$: la suite monte, descend, remonte. Elle n'est ni croissante ni décroissante : elle est non monotone.

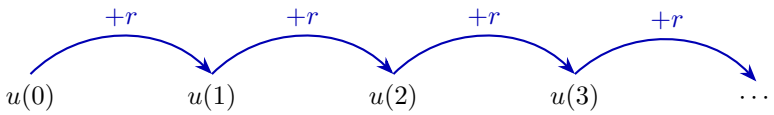
2 Suites arithmétiques : la croissance linéaire

2.1 Définition

Définition 2.1: Suite arithmétique

Une suite u est **arithmétique** lorsqu'on passe d'un terme au suivant en **ajoutant toujours le même nombre** r, appelé **raison** de la suite :

$$u(n+1) = u(n) + r \qquad \text{pour tout entier naturel } n.$$



Exemple 2.2: Calculer de proche en proche

u est arithmétique de premier terme $u(0) = 20$ et de raison 3 : $u(1) = 20 + 3 = 23$, $u(2) = 26$, $u(3) = 29$.

v est arithmétique de premier terme $v(0) = 10$ et de raison -2 : $v(1) = 10 - 2 = 8$, $v(2) = 6$, $v(3) = 4$.

Méthode 2.3: Montrer qu'une suite est (ou n'est pas) arithmétique

- **Dans une situation concrète :** on justifie par une phrase qu'on *ajoute la même quantité* à chaque étape.
  « Chaque séance coûte 4 € de plus : on passe d'un terme au suivant en ajoutant 4, donc u est arithmétique de raison 4. »
- **Avec une formule :** on calcule $u(n+1) - u(n)$. Si on trouve une **constante** (un nombre qui ne dépend pas de n), la suite est arithmétique et cette constante est la raison.
- **Pour montrer qu'elle ne l'est pas :** il suffit de trouver deux écarts consécutifs différents, par exemple $u(1) - u(0) \neq u(2) - u(1)$.

Exemple 2.4: Le cinéma d'Idir, suite

Pour la suite $u(n) = 15 + 4n$ de la méthode 1.4 :

$$u(n+1) - u(n) = 15 + 4(n+1) - (15 + 4n) = 15 + 4n + 4 - 15 - 4n = 4.$$

La différence est constante : u est arithmétique de raison 4 et de premier terme $u(0) = 15$.

2.2 Terme de rang n

Propriété 2.5: Expression en fonction de n

Si u est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout entier naturel n :

$$\boxed{u(n) = u(0) + n\,r}$$

Plus généralement, pour tous entiers n et p : $u(n) = u(p) + (n-p)\,r$. En particulier, si la suite commence au rang 1 : $u(n) = u(1) + (n-1)\,r$.

Remarque : D'où vient la formule

Pour aller de $u(0)$ à $u(n)$, on « fait n pas », et on ajoute r à chaque pas : on a donc ajouté n fois r, c'est-à-dire $n\,r$.

Exemple 2.6: Calculer un terme lointain, retrouver la raison

1. u est arithmétique, $u(0) = 5$ et $r = -2$. Alors $u(n) = 5-2n$, et $u(10) = 5-2\times 10 = -15$.
2. v est arithmétique, $v(2) = 4$ et $v(8) = -6$. Entre le rang 2 et le rang 8, on fait 6 pas, donc $v(8) = v(2) + 6r$, soit $-6 = 4 + 6r$, d'où $r = -\dfrac{10}{6} = -\dfrac{5}{3}$.

2.3 Sens de variation et représentation graphique

Propriété 2.7: Sens de variation

Soit u une suite arithmétique de raison r.

— Si $r > 0$, la suite u est strictement croissante.
— Si $r < 0$, la suite u est strictement décroissante.
— Si $r = 0$, la suite u est constante.

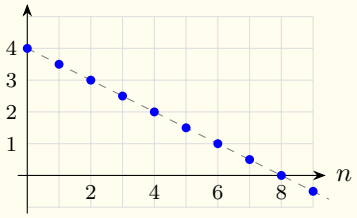
Propriété 2.8: Représentation graphique

Les points représentant une suite arithmétique sont **alignés** : ils sont sur la droite d'équation $y = u(0) + r\,x$, représentation de la fonction affine $x \mapsto r\,x + u(0)$. La raison r joue le rôle du coefficient directeur.

On parle de **croissance linéaire** (ou de décroissance linéaire si $r < 0$).

Exemple 2.9: Le lien avec les fonctions affines

La suite arithmétique de premier terme $u(0) = 4$ et de raison $r = -0{,}5$ a pour terme général $u(n) = 4 - 0{,}5n$.
Comme $r < 0$, elle est strictement décroissante, et ses points sont alignés sur la droite d'équation $y = 4 - 0{,}5x$ (en pointillés).



2.4 Problème de seuil

Méthode 2.10: Résoudre un problème de seuil (cas arithmétique)

Question type : à partir de quel rang n a-t-on $u(n) > S$ (ou $u(n) < S$) ?

1. Écrire $u(n)$ en fonction de n.
2. Résoudre l'inéquation $u(n) > S$ comme une inéquation du premier degré.
3. Conclure avec le **plus petit entier** qui convient, puis **revenir à la situation** (année, mois, nombre de séances…).

Exemple. Idir dispose d'un budget de 100 €. Combien de séances peut-il payer au maximum ?
On résout $u(n) \leqslant 100$, soit $15 + 4n \leqslant 100$, c'est-à-dire $4n \leqslant 85$, d'où $n \leqslant 21{,}25$. Comme n est entier, Idir peut payer au maximum 21 séances ($u(21) = 99$ €, alors que $u(22) = 103$ €).

3 Suites géométriques : la croissance exponentielle

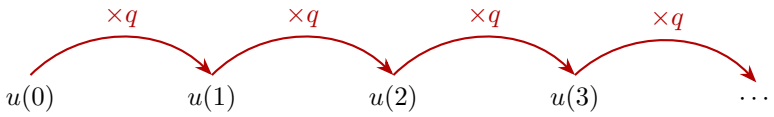
Dans tout ce chapitre, comme le prévoit le programme, on étudie des suites géométriques **à termes strictement positifs** : premier terme strictement positif et raison strictement positive.

3.1 Définition

Définition 3.1: Suite géométrique

Une suite u est **géométrique** lorsqu'on passe d'un terme au suivant en **multipliant toujours par le même nombre** q, appelé **raison** de la suite :

$$u(n+1) = q \times u(n) \qquad \text{pour tout entier naturel } n.$$



Exemple 3.2: Calculer de proche en proche

u est géométrique de premier terme $u(0) = 20$ et de raison 2 : $u(1) = 20 \times 2 = 40$, $u(2) = 80$, $u(3) = 160$.

v est géométrique de premier terme $v(0) = 10$ et de raison $\frac{1}{2}$: $v(1) = 10 \times \frac{1}{2} = 5$, $v(2) = 2{,}5$, $v(3) = 1{,}25$.

Propriété 3.3: Évolution en pourcentage et suite géométrique

Augmenter de $t\,\%$, c'est multiplier par $1 + \dfrac{t}{100}$; diminuer de $t\,\%$, c'est multiplier par $1 - \dfrac{t}{100}$ (voir la fiche sur les pourcentages).

Une quantité qui **augmente (ou diminue) chaque année du même pourcentage** est donc modélisée par une **suite géométrique**, dont la raison est le **coefficient multiplicateur**.

Exemple 3.4: Raisons à connaître

Évolution à chaque étape	$+10\,\%$	$+3\,\%$	$-8\,\%$	$-50\,\%$ (moitié)
Raison q	1,1	1,03	0,92	0,5

Méthode 3.5: Montrer qu'une suite est (ou n'est pas) géométrique

- **Dans une situation concrète :** on justifie par une phrase qu'on *multiplie par le même nombre* à chaque étape.
  « Chaque année, le chiffre d'affaires augmente de 10 %, c'est-à-dire qu'il est multiplié par 1,1 : C est géométrique de raison 1,1. »
- **Avec une formule :** on calcule le quotient $\dfrac{u(n+1)}{u(n)}$. Si on trouve une **constante**, la suite est géométrique et cette constante est la raison.
- **Pour montrer qu'elle ne l'est pas :** il suffit de trouver deux quotients consécutifs différents, par exemple $\dfrac{u(1)}{u(0)} \neq \dfrac{u(2)}{u(1)}$.

3.2 Terme de rang n

Propriété 3.6: Expression en fonction de n

Si u est une suite géométrique de raison q, alors pour tout entier naturel n :

$$\boxed{u(n) = u(0) \times q^n}$$

Plus généralement, pour tous entiers $n \geqslant p$: $u(n) = u(p) \times q^{n-p}$. En particulier, si la suite commence au rang 1 : $u(n) = u(1) \times q^{n-1}$.

Remarque : D'où vient la formule

Pour aller de $u(0)$ à $u(n)$, on fait n pas et on multiplie par q à chaque pas : on a donc multiplié n fois par q, c'est-à-dire par q^n.

Exemple 3.7: Le chiffre d'affaires, suite

Reprenons la méthode 1.7 : C est géométrique de raison 1,1 et de premier terme $C(0) = 500\,000$. Donc, pour tout n,

$$C(n) = 500\,000 \times 1{,}1^n.$$

On peut maintenant calculer *directement* le chiffre d'affaires de 2028 : sachant que $1{,}1^{10} \approx 2{,}594$, on obtient $C(10) = 500\,000 \times 1{,}1^{10} \approx 1\,297\,000\,€$.

3.3 Sens de variation et représentation graphique

Propriété 3.8: Sens de variation (termes strictement positifs)

Soit u une suite géométrique de premier terme $u(0) > 0$ et de raison $q > 0$.

- Si $q > 1$, la suite u est strictement croissante.
- Si $0 < q < 1$, la suite u est strictement décroissante.
- Si $q = 1$, la suite u est constante.

Remarque : Justification

$u(n+1) - u(n) = u(0)\,q^n \times q - u(0)\,q^n = u(0)\,q^n\,(q-1)$. Comme $u(0) > 0$ et $q^n > 0$, ce nombre a le signe de $q - 1$.

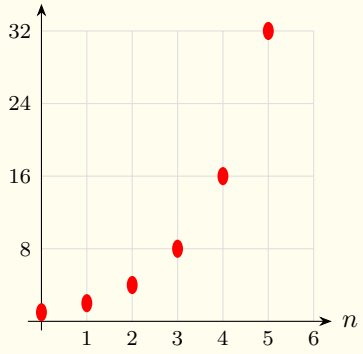
Propriété 3.9: Représentation graphique

Les points représentant une suite géométrique ne sont **pas alignés** : ils s'écartent de plus en plus vite de l'axe des abscisses lorsque $q > 1$, et s'en rapprochent de plus en plus lentement lorsque $0 < q < 1$.

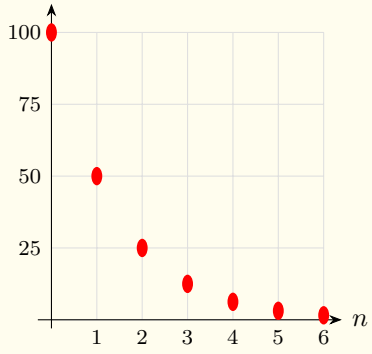
On parle de **croissance exponentielle** (ou de décroissance exponentielle si $0 < q < 1$).

Exemple 3.10: Croissance et décroissance exponentielles

$u(0) = 1$, $q = 2$: $u(n) = 2^n$



$v(0) = 100$, $q = 0{,}5$: $v(n) = 100 \times 0{,}5^n$



3.4 Problème de seuil

Pour une suite géométrique, l'inéquation $u(0) \times q^n > S$ ne se résout pas par le calcul avec les outils de première : on utilise un **tableau de valeurs**, souvent fourni par l'énoncé (comme au bac), ou obtenu au tableur, à la calculatrice ou avec un programme Python.

Méthode 3.11: Résoudre un problème de seuil (cas géométrique)

Question type : en quelle année le chiffre d'affaires dépassera-t-il 1 000 000 € ?

1. **Écrire le terme général** : $C(n) = 500\,000 \times 1{,}1^n$.
2. **Se ramener à une inéquation sur** q^n, en divisant par le premier terme (positif) :

$$500\,000 \times 1{,}1^n > 1\,000\,000 \iff 1{,}1^n > 2.$$

3. **Lire le tableau de valeurs** et chercher le premier rang qui convient :

n	6	7	8
$1{,}1^n$ (arrondi au millième)	1,772	1,949	2,144

4. **Citer les deux valeurs qui encadrent le seuil :** $1{,}1^7 \approx 1{,}949 < 2$ et $1{,}1^8 \approx 2{,}144 > 2$.
5. **Revenir à la situation :** le premier rang est $n = 8$, et le chiffre d'affaires dépassera 1 000 000 € en $2018 + 8 = 2026$.

Exemple 3.12: Un programme de seuil en Python

Le programme ci-dessous calcule les termes de proche en proche *tant que* le seuil n'est pas dépassé. À la fin, la variable `n` contient le premier rang pour lequel $C(n) > 1\,000\,000$; ici, il affiche `8`.

```
1 C = 500000
2 n = 0
3 while C <= 1000000:
4     C = 1.1 * C
5     n = n + 1
6 print(n)
```

Ce programme convient pour *toute* suite définie par récurrence : il suffit de changer la valeur initiale, la relation de récurrence et la condition de la boucle `while`.

4 Comparer croissance linéaire et croissance exponentielle

Propriété 4.1: Comment reconnaître le modèle

	Suite arithmétique	**Suite géométrique**
On passe d'un terme au suivant en…	ajoutant r	multipliant par q
Mot-clé dans un énoncé	« $+300\,€$ », « -2 cm »	« $+5\,\%$ », « la moitié »
Ce qui est constant	la différence $u(n+1)-u(n)$	le quotient $\dfrac{u(n+1)}{u(n)}$
Terme de rang n	$u(n)=u(0)+n\,r$	$u(n)=u(0)\times q^n$
Représentation	points alignés	points sur une courbe
Type de croissance	linéaire	exponentielle

Exemple 4.2: Intérêts simples ou intérêts composés ?

On place $5\,000\,€$. Offre A : la banque verse $110\,€$ d'intérêts chaque année. Offre B : la banque verse $2\,\%$ de la somme présente sur le compte chaque année. On note $a(n)$ et $b(n)$ les sommes disponibles au bout de n années.

- On ajoute 110 chaque année : a est arithmétique de raison 110, donc $a(n)=5\,000+110n$.
- On multiplie par 1,02 chaque année : b est géométrique de raison 1,02, donc $b(n)=5\,000\times 1{,}02^n$.

n	1	5	10	11	21
$a(n)$	5 110	5 550	6 100	6 210	7 310
$b(n)$ (arrondi)	5 100	5 520,40	6 094,97	6 216,87	7 578,33

L'offre A est meilleure pendant 10 ans ; à partir de la 11$^{\text{e}}$ année, l'offre B la dépasse, et l'écart ne cesse ensuite de se creuser.

Remarque : À long terme, l'exponentielle gagne toujours

Une croissance exponentielle peut démarrer plus lentement qu'une croissance linéaire, mais elle finit *toujours* par la dépasser, puis par la distancer de très loin. C'est la morale de la légende de l'échiquier : 2 grains sur la première case, 4 sur la deuxième, 8 sur la troisième… donnent $2^{64}\approx 1{,}8\times 10^{19}$ grains sur la dernière case, soit bien plus que toute la production mondiale de blé.

Bilan

Dans ce chapitre, nous avons appris à :

- calculer les termes d'une suite définie **de façon explicite** ($u(n)$ en fonction de n) ou **par récurrence** ($u(n+1)$ en fonction de $u(n)$) ;
- **modéliser** une situation par une suite, et représenter une suite par un **nuage de points** ;
- étudier le **sens de variation** d'une suite à l'aide du signe de $u(n+1)-u(n)$;
- reconnaître une **suite arithmétique** (on ajoute r, croissance linéaire) et utiliser $u(n)=u(0)+n\,r$;
- reconnaître une **suite géométrique** (on multiplie par q, croissance exponentielle) et utiliser $u(n)=u(0)\times q^n$;

— résoudre un **problème de seuil**, par une inéquation (cas arithmétique) ou à l'aide d'un tableau de valeurs (cas géométrique).