

Cours : Généralités sur les suites

I. Définitions, notations et vocabulaire

1. Définition

Définition

Une suite numérique u est une fonction dont la variable est un entier naturel n .

L'image de n par u est noté $u(n)$ ou u_n .

On note la suite u , ou en mettant des parenthèses : (u_n)

Le nombre u_0 est appelé **terme initial** de la suite (u_1 si la suite est définie à partir de $n = 1$)

Le nombre u_n est appelé **terme général de rang n** (ou **terme d'indice n**) de la suite.

Remarque

On utilise souvent les lettres u , v et w pour nommer une suite.

2. Modes de génération

a. Comme une fonction : formule explicite

L'expression de $u(n)$ est donnée en fonction de n .

L'expression de u_n est analogue à l'expression $f(x) = 2x - 3$;
seulement ici la variable x est un entier naturel.

Cette suite n'est pas définie pour $n = 0$ car on ne peut pas diviser par 0.

Exemples types

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 2n - 3$$

Calculer les 4 premiers termes de la suite (u_0, u_1, u_2, u_3) puis u_{100}

$$u_0 = 2 \times 0 - 3 = -3$$

$$u_1 = 2 \times 1 - 3 = -1$$

$$u_2 = 2 \times 2 - 3 = 1$$

$$u_3 = 2 \times 3 - 3 = 3 \dots\dots\dots u_{100} = 2 \times 100 - 3 = 197$$

2. Soit la suite (v_n) définie à partir de $n = 1$ par :

$$v_n = \frac{n-1}{n}$$

Calculer les 4 premiers termes de la suite (u_1, u_2, u_3, u_4)

$$u_1 = \frac{1-1}{1} = 0$$

$$u_2 = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$u_3 = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$u_4 = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

b. Par récurrence

L'expression d'un terme est donnée en fonction du terme qui précède.

Comprendre la notation avec les indices

1, 2, 3, 4, 5 sont des nombres entiers consécutifs : pour passer d'un entier à un entier consécutif il suffit d'ajouter 1.

$$3 = 2 + 1$$

$$4 = 3 + 1$$

On a commencé à écrire une liste d'entiers consécutifs. Remplacer les 5 points d'interrogation par le nombre qui convient.

1 2 ? 4 5 6 ? ? n ? ?

Dans le cas d'une relation de récurrence, le terme initial est toujours donné.

Dans le cas d'une suite définie par récurrence il est impossible de calculer un terme sans avoir calculé tous les termes qui précèdent. Il sera utile d'utiliser le tableur ou un programme pour automatiser les calculs.

Exemple type

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n - 3$$

Calculer les 4 premiers termes de la suite (u_0, u_1, u_2, u_3)

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = 2 \times u_0 - 3 = 2 \times 1 - 3 = -1$$

$$u_2 = 2 \times u_1 - 3 = 2 \times (-1) - 3 = -5$$

$$u_3 = 2 \times u_2 - 3 = 2 \times (-5) - 3 = -13$$

II. Représentation graphique

La représentation graphique d'une suite est un nuage de points de coordonnées $(n ; u_n)$
où n décrit les entiers naturels.

Exemples types

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 2n - 3$
Placer les 5 premiers points de la représentation graphique de la suite u .

$$u_0 = 2 \times 0 - 3 = -3$$

$$u_1 = 2 \times 1 - 3 = -1$$

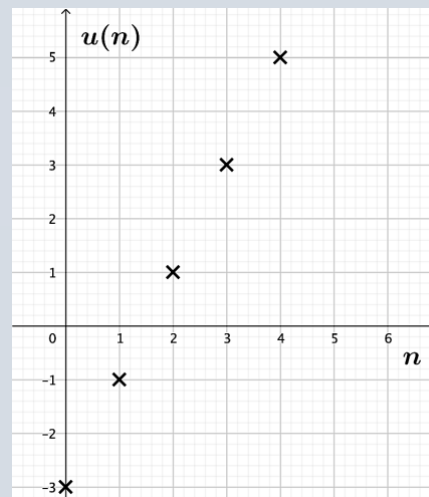
$$u_2 = 2 \times 2 - 3 = 1$$

$$u_3 = 2 \times 3 - 3 = 3$$

$$u_4 = 2 \times 4 - 3 = 5$$

On va donc placer les points de coordonnées :

$(0 ; -3)$ $(1 ; -1)$ $(2 ; 1)$ $(3 ; 3)$ $(4 ; 5)$



2. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_0 = 1 \quad v_{n+1} = v_n^2 - 3$$

Placer les 5 premiers points de la représentation graphique de la suite v .

$$v_0 = 1$$

$$v_1 = v_0^2 - 3 = 1^2 - 3 = 1 - 3 = -2$$

$$v_2 = v_1^2 - 3 = (-2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

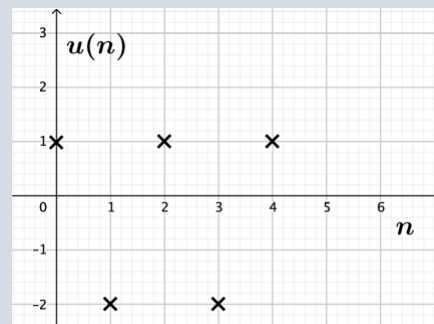
$$v_3 = v_2^2 - 3 = 1^2 - 3 = 1 - 3 = -2$$

$$v_4 = v_3^2 - 3 = 1$$

On va donc placer les points

de coordonnées :

$(0 ; 1)$ $(1 ; -2)$ $(2 ; 1)$ $(3 ; -2)$ $(4 ; 1)$



III. Sens de variation

Définition

Si un terme est toujours **plus grand** que le terme précédent, la suite (u_n) est **croissante**.

On a alors pour tout entier naturel n $u_{n+1} \geq u_n$

Si un terme est toujours **plus petit** que le terme précédent, la suite est **décroissante**.

On a alors pour tout entier naturel n $u_{n+1} \leq u_n$

Méthode pour étudier les variations d'une suite

Pour étudier si une suite est croissante ou décroissante on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors $u_{n+1} \geq u_n$ et donc (u_n) est croissante.

Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors $u_{n+1} \leq u_n$ et donc (u_n) est décroissante.

Remarques

Dans ce cas, on peut dire que la suite est **strictement** croissante car $u_{n+1} - u_n > 0$ (inégalité stricte)

$u_n = n^2$ est analogue à l'expression de la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^2$.

Comme on sait que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ alors on peut affirmer que (u_n) est strictement croissante.

La suite n'est **ni croissante ni décroissante** : on dit qu'elle n'est **pas monotone**.

Exemples types

1. Étudier les variations de la suite (u_n) définie par : $u_n = n^2$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - n^2 \\ &= n^2 + 2n + 1 - n^2 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

Comme n est un entier positif, $2n + 1 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$
La suite (u_n) est donc croissante.

2. Étudier les variations de la suite (v_n) définie par : $v_0 = 10$ $v_{n+1} = v_n - 2$

$$v_{n+1} - v_n = v_n - 2 - v_n = -2 < 0$$

La suite (v_n) est donc strictement décroissante.

3. Étudier les variations de la suite (w_n) définie par : $w_n = (-1)^n$

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 ; \\ u_1 &= -1 ; \\ u_2 &= 1 ; \\ u_3 &= -1 ; \\ u_4 &= 1 \dots \dots \dots \end{aligned}$$