Suites numériques

Feuille d'exercices – séquence complète

Mathématiques – Première (enseignement scientifique)

Sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième (on gardera davantage de chiffres pour les très petites valeurs). Pour chaque problème de seuil, on citera les deux valeurs qui encadrent le seuil, puis on reviendra à la situation (année, mois, nombre de jours…).

1 Généralités sur les suites

Activité : Découverte des suites

1. Voici une liste de nombres : 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; …

a) Quel semble être logiquement le nombre suivant 48 ? Et celui d'après ?
b) Comment procède-t-on pour trouver le nombre suivant ?

2. Voici une autre liste : 0 ; 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; …

a) Quel semble être logiquement le nombre suivant 21 ? Et celui d'après ?
b) Comment procède-t-on pour trouver le nombre suivant ?

Ces listes ordonnées de nombres sont appelées des **suites**.

3. Soit la suite u dont le terme de rang n, noté $u(n)$ ou u_n, est donné par $u(n) = 3n^2 - 2n$. On peut la voir comme une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

a) Calculer $u(0)$, $u(1)$, $u(4)$ et $u(9)$.
b) Pourquoi cette suite semble-t-elle croissante ?

4. Pour aller plus loin. On reprend la suite de la question 3.

a) Calculer et simplifier $u(n+1) - u(n)$.
b) Quel est le signe de $u(n+1) - u(n)$ lorsque n est un entier naturel ?
c) Expliquer pourquoi la suite u est croissante.

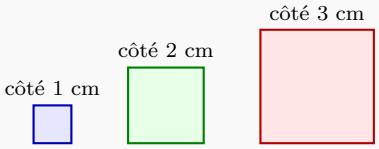
Exercice 1: Méthode 1 – Le cinéma d'Idir

Idir va au cinéma. Il a acheté une carte d'abonnement à 15 €, et chaque séance lui coûte ensuite 4 €. On note u la suite des nombres $u(n)$ qui donnent le prix total payé par Idir en fonction du nombre n de séances.

1. a) Donner le prix total payé par Idir pour 5 séances de cinéma.
   b) À quel terme de la suite u ce nombre correspond-il ?
2. À quoi correspondent les termes $u(3)$ et $u(10)$? Donner leurs valeurs.
3. a) Quelle est la formule qui donne la somme payée par Idir pour n séances ?
   b) En déduire le terme général $u(n)$ de la suite u.

Exercice 2: Des carrés de plus en plus grands

On s'intéresse à une suite de carrés : le premier a pour côté 1 cm, le deuxième 2 cm, le troisième 3 cm, et ainsi de suite.



1. On note $p(1)$ le périmètre du premier carré. Donner la valeur de $p(1)$.
2. De même, on note $p(2)$ et $p(3)$ les périmètres des deuxième et troisième carrés. Que valent $p(2)$ et $p(3)$?
3. Quelle est la longueur du côté du 10^{e} carré ? Donner son périmètre $p(10)$.
4. Exprimer $p(n)$ en fonction de n.
5. Soit $a(n)$ l'aire du carré de côté n. Donner $a(1)$, $a(2)$ et $a(3)$, puis l'expression de $a(n)$ en fonction de n.

Exercice 3: Le compte de Léa

Léa veut investir dans un commerce. Elle met 6 000 € sur son compte, puis ajoute 300 € tous les mois, sans rien retirer. Elle désire connaître le montant de son compte après n mois de placement.

1. Calculer le montant du compte de Léa, mois après mois, jusqu'à 5 mois de placement.
2. On exécute le programme ci-contre avec `n = 5`. Compléter le tableau ci-dessous, qui donne la valeur des variables avant la boucle, puis à la fin de chaque passage dans la boucle. Qu'est-ce qui est affiché ?
3. Que fait ce programme ?

```
1 n = 5
2 u = 6000
3 for i in range(1, n + 1):
4     u = u + 300
5 print(u)
```

`i`						
`u`	6 000					

Exercice 4: Calculer des termes

Calculer les cinq premiers termes des suites suivantes, définies pour tout entier naturel n. On donnera les valeurs exactes.

$$u(n) = 4n^2 - 6n + 6 \qquad v(n) = \frac{n+3}{n+1} \qquad w(n) = 5n + \frac{3}{n+2}$$

Activité : Une ville qui se dépeuple

À la suite de la restructuration d'un grand groupe industriel, une petite ville comptait 4 000 habitants en 2015. Depuis, chaque année, elle perd 10 % de ses habitants et en accueille 300 nouveaux.

Objectif : estimer la population en 2025. On note $p(n)$ la population l'année $2015 + n$.

1. Que vaut $p(0)$?
2. Calculer $p(1)$. Comment s'exprime $p(1)$ en fonction de $p(0)$? Exprimer en une phrase ce que signifie ce résultat.
3. Comment s'exprime $p(2)$ en fonction de $p(1)$? Calculer $p(2)$.

4. Si n désigne une année donnée, comment désigner l'année qui suit ? L'année qui précède ?
5. Écrire une formule qui permet de calculer la population d'une année en fonction de celle de l'année précédente.
6. Proposer une stratégie pour répondre au problème avec un tableur, puis avec un programme Python.

Exercice 5: Méthode 2 – Le chiffre d'affaires

Le chiffre d'affaires d'une entreprise dans le domaine de la téléphonie mobile s'accroît tous les ans de 10 %. En 2018, le chiffre d'affaires était de 500 000 €. On note $C(n)$ le chiffre d'affaires obtenu au cours de l'année $2018 + n$.

1. À quelle année correspond le terme $C(0)$? Quelle est sa valeur ?
2. Calculer $C(1)$. Interpréter ce résultat.
3. Calculer les chiffres d'affaires en 2020 et en 2021.
4. Peut-on calculer directement $C(10)$?
5. Donner l'expression de $C(n+1)$ en fonction de $C(n)$, pour tout entier naturel n.

Exercice 6: Sens de variation

Étudier le sens de variation de chacune des suites suivantes, en étudiant le signe de la différence entre deux termes consécutifs (par exemple $a(n+1) - a(n)$).

1. $a(n) = 3n + 2$ pour tout entier naturel n.
2. $b(n) = n^2 + 4$ pour tout entier naturel n.
3. $c(0) = 3$ et, pour tout entier naturel n, $c(n+1) = c(n) - n^2 - 1$.

2 Suites arithmétiques

Exercice 7: Premiers calculs

1. u est arithmétique de premier terme $u(0) = 5$ et de raison -2. Calculer $u(1)$, $u(2)$ et $u(3)$.
2. v est arithmétique de raison $r = 6$ et de premier terme $v(0) = -11$. Calculer $v(10)$.
3. w est arithmétique de raison $r = -12$ et $w(7) = 14$. Calculer $w(26)$.

Exercice 8: Les jeux vidéo de Marina

Marina avait 10 jeux vidéo en janvier 2019. À partir de février 2019, elle achète deux nouveaux jeux le premier jour de chaque mois. On note $u(n)$ le nombre de jeux de Marina à la fin du mois, n mois après janvier 2019.

1. Déterminer $u(0)$, $u(1)$ et $u(2)$.
2. Justifier que la suite u est arithmétique et déterminer sa raison.

Exercice 9: L'entraînement d'Enzo

Enzo s'entraîne pour une épreuve de natation de 1 500 m, dans une piscine de 50 m de long. Le premier jour, il fait deux longueurs ; puis chaque jour, il nage une longueur de plus que la veille. On note $u(n)$ la distance, en mètres, nagée n jours après le premier jour (ainsi,

$u(0)$ est la distance nagée le premier jour).

1. Donner les valeurs de $u(0)$, $u(1)$ et $u(2)$.
2. Justifier que la suite u est arithmétique et déterminer sa raison.
3. Exprimer $u(n)$ en fonction de n.
4. Quel jour Enzo nagera-t-il pour la première fois 1 500 m ?

Exercice 10: Arithmétique ou pas ?

Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? Si oui, préciser leur premier terme et leur raison.

a) $u(n) = n^2 + 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) $p(0) = -2$ et $p(n+1) = p(n) - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
c) $v(n) = -n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
d) $w(n) = n^2 - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
e) $t(n) = 3n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
f) $s(n) = \dfrac{n^2 + n}{n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
g) $a(0) = 3$ et $a(n) - a(n+1) = 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
h) $b(0) = 1$ et $b(n+1) + b(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11: Terme général

1. u est arithmétique de premier terme $u(0) = 5$ et de raison -2. Exprimer $u(n)$ en fonction de n, puis calculer $u(10)$.
2. v est arithmétique de premier terme $v(0) = -4$ et de raison 42. Exprimer $v(n)$ en fonction de n, puis calculer $v(23)$.

Exercice 12: Retrouver le premier terme ou la raison

Dans chaque cas, u est une suite arithmétique.

1. La raison vaut 1,5 et $u(4) = -9$. Déterminer $u(0)$.
2. $u(0) = 3$ et $u(1) = 7$. Déterminer la raison.
3. $u(2) = 4$ et $u(8) = -6$. Déterminer la raison.

Exercice 13: Variations et représentation graphique

1. Donner le sens de variation des suites suivantes, en justifiant.
   a) u est arithmétique de raison 2 et de premier terme $u(0) = -3$.
   b) v est définie par $v(n) = 5 - 3n$.
2. Soit w la suite arithmétique de premier terme $w(0) = 5$ et de raison -1.
   a) Représenter graphiquement les dix premiers termes de la suite w.
   b) Que peut-on dire de ces points ? Donner une équation de la droite sur laquelle ils se trouvent.

Exercice 14: La tour de briques

Un groupe d'enfants construit la plus haute tour possible. La tour mesure initialement 40 cm ; chaque enfant y ajoute un étage de 2 cm. On note $u(n)$ la hauteur de la tour, en cm, après le passage de n enfants. On a $u(0) = 40$.

1. Déterminer $u(1)$.
2. Exprimer $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$. En déduire la nature de la suite u.
3. Exprimer $u(n)$ en fonction de n.
4. Combien faut-il de passages pour que la tour mesure 1 m ?

Exercice 15: Le coffre-fort d'Helin

Pour ses 10 ans, les parents d'Helin lui offrent un petit coffre-fort et y placent 100 €. Puis, chaque année à son anniversaire, ils lui offrent 50 € qu'elle place dans le coffre. On note $u(n)$ la somme dans le coffre n années après son dixième anniversaire ; ainsi $u(0) = 100$.

1. Exprimer $u(n)$ en fonction de n.
2. Quelle somme Helin a-t-elle dans son coffre le lendemain de son 15$^{\text{e}}$ anniversaire ?
3. À quel âge Helin aura-t-elle 1 000 € dans son coffre ?

Exercice 16: Le salaire de Chloé

Au 1$^{\text{er}}$ janvier 2010, Chloé débute dans une entreprise avec un salaire mensuel de 1 500 €. Son contrat prévoit une augmentation de 7 € chaque mois, à partir du deuxième mois. On note $a(0) = 1\,500$ son salaire d'embauche puis, pour $n \geqslant 1$, $a(n)$ son salaire du $(n+1)$-ième mois.

1. Déterminer le salaire $a(1)$ du deuxième mois.
2. Exprimer $a(n+1)$ en fonction de $a(n)$, et en déduire la nature de la suite a.
3. Déterminer le salaire du 7$^{\text{e}}$ mois.
4. Déterminer le premier mois pour lequel son salaire dépassera 2 000 €.

Exercice 17: Les intérêts simples d'Albert

Albert place un capital initial $C(0) = 3\,000$ € à intérêts simples, au taux annuel de 6 % : chaque année, le capital augmente de 6 % *du capital initial* (les intérêts ne sont pas capitalisés). On note $C(n)$ le capital, en euros, au bout de n années.

1. Montrer que, pour tout entier n, $C(n+1) = C(n) + 180$. Qu'en déduit-on ?
2. Exprimer $C(n)$ en fonction de n.
3. De quel capital Albert dispose-t-il au bout de 10 ans ?
4. Au bout de combien d'années le capital aura-t-il doublé ?
5. Au bout de combien d'années le capital dépassera-t-il 10 000 € ?

Exercice 18: Le forage

Une ferme aquacole de Vendée décide de cultiver des micro-algues sur de l'eau de forage. Elle fait appel à une entreprise A pour creuser un puits. Le coût comprend un forfait de mise en place du matériel de 800 €, puis 200 € par mètre creusé.

On note $U(1)$ le montant forfaitaire, $U(2)$ le coût du forage à 1 mètre, $U(3)$ le coût à 2 mètres, …, $U(n)$ le coût du forage à $n-1$ mètres.

1. Calculer $U(2)$, $U(3)$ et $U(4)$.
2. Donner la nature de la suite U et préciser sa raison.
3. Calculer $U(13)$.
4. Le forage est prévu à 12 mètres. Une entreprise B propose un forage à 12 mètres pour un coût global de 3 500 €. Laquelle des deux entreprises est la plus avantageuse ? Justifier.

3 Suites géométriques

Activité : La légende de l'échiquier

Le roi demande à l'inventeur du jeu d'échecs de choisir lui-même sa récompense. Celui-ci répond : « Place deux grains de blé sur la première case de l'échiquier, quatre sur la deuxième, huit sur la troisième, seize sur la quatrième, et ainsi de suite. Je prendrai tous les grains qui se trouvent sur l'échiquier. » Le roi sourit de la modestie de cette demande. Était-elle vraiment modeste ?

On numérote les cases de 1 à 64, et on note $u(n)$ le nombre de grains posés sur la case n.

a) Calculer $u(1)$, $u(2)$, …, jusqu'à $u(8)$.
b) Comment passe-t-on d'un terme au suivant ?
c) Écrire $u(2)$ en fonction de $u(1)$, puis $u(3)$ en fonction de $u(1)$, puis $u(4)$ en fonction de $u(1)$.
d) En déduire, pour tout entier n entre 1 et 64, la valeur de $u(n)$.
e) Combien de grains de blé y a-t-il sur la 64^{e} case ? Conclure.

Exercice 19: Question flash – Évolutions successives

La population d'un village a augmenté de 8 % en 2019, puis a baissé de 10 % en 2020, puis a augmenté de 20 % en 2021. Quel est le taux d'évolution de la population entre fin 2018 et fin 2021 ?

Exercice 20: Premiers calculs

1. u est géométrique de raison 4 et de premier terme $u(0) = 0{,}5$. Calculer $u(1)$, $u(2)$ et $u(3)$.
2. v est géométrique de raison 3 et de premier terme $v(0) = 2$.
   a) Exprimer $v(n+1)$ en fonction de $v(n)$, puis $v(n)$ en fonction de n.
   b) Écrire $v(19)$ sous la forme 2×3^k, où k est un entier à préciser.
3. w est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w(0) = 2$. Exprimer $w(n)$ en fonction de n, puis calculer $w(10)$.
4. V est géométrique de raison $q = 3$ et $V(0) = 5$. Calculer $V(10)$. On donne $3^{10} = 59\,049$.
5. V' est géométrique de raison $q = 2$ et $V'(15) = 262\,144$. Calculer $V'(6)$. On donne $262\,144 = 2^{18}$.

Exercice 21: Retrouver le premier terme ou la raison

Dans chaque cas, u est une suite géométrique à termes strictement positifs.

1. La raison vaut 2 et $u(3) = 12$. Déterminer $u(0)$.
2. $u(0) = 3$ et $u(2) = 12$. Déterminer la raison.
3. $u(2) = 4$ et $u(4) = 1$. Déterminer la raison, puis $u(0)$, puis exprimer $u(n)$ en fonction de n.

Exercice 22: Géométrique ou pas ?

Les suites suivantes sont-elles géométriques ? Justifier et, si oui, préciser le premier terme et la raison.

a) $u(0) = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n+1) = \dfrac{u(n)}{2}$.
b) $v(n) = 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
c) $w(n) = \dfrac{1}{4^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
d) $a(n) = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 23: Sens de variation

Déterminer le sens de variation des suites suivantes, en justifiant.

1. $u(n) = 7 \times 0{,}5^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $v(n) = 4 \times 9^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. w est géométrique de raison 2 et de premier terme $w(0) = 3$.
4. $t(0) = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t(n+1) = 1{,}24\,t(n)$.
5. s est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $s(0) = 5$.

Exercice 24: Une ville qui grandit

Une ville comptait 10 000 habitants en 2018. Chaque année, le nombre d'habitants augmente de 10 % par rapport à l'année précédente. On note $u(n)$ le nombre d'habitants en $2018 + n$.

1. Donner $u(0)$ et $u(1)$.
2. Justifier que la suite u est géométrique et préciser sa raison.
3. Exprimer $u(n)$ en fonction de n et estimer la population en 2030. On donne $1{,}1^{12} \approx 3{,}14$.

Exercice 25: Le gâteau de Walid

Walid a posé un gâteau au chocolat dans une assiette. Chaque fois qu'il passe devant, il mange la moitié de ce qui reste. On note $u(n)$ la proportion du gâteau qui reste après que Walid s'est servi n fois.

1. Donner $u(0)$ et $u(1)$.
2. Justifier que la suite u est géométrique et préciser sa raison.
3. Au bout de combien de passages reste-t-il moins de 1 % du gâteau ?

Exercice 26: Le fourgon

Un transporteur achète en 2002 un fourgon au prix de 50 200 €. Compte tenu des kilomètres parcourus, le véhicule perd 20 % de sa valeur chaque année ; la perte est calculée sur la valeur de l'année précédente.

1. Calculer la valeur du fourgon en 2003, 2004 et 2005.
2. Les valeurs du véhicule en 2002, 2003, 2004, 2005 forment une suite de nombres. Préciser la nature et la raison de cette suite.

Exercice 27: Battre le record

Alicia et Yoann font un tournoi de mini-jeux sur un jeu vidéo. Alicia obtient un score de 5 000 et Yoann un score de 3 500. Yoann décide de s'entraîner, et chaque semaine il améliore son score de 5 %. On note $y(n)$ le score de Yoann au bout de n semaines d'entraînement.

1. Justifier que $y(n) = 3\,500 \times 1{,}05^n$.

2. Montrer que $y(n) > 5\,000$ équivaut à $1{,}05^n > \dfrac{10}{7}$. On admet que $\dfrac{10}{7} \approx 1{,}43$.
3. À l'aide du tableau ci-dessous, déterminer au bout de combien de semaines Yoann battra le record d'Alicia.

n	5	6	7	8	9
$1{,}05^n$ (arrondi au millième)	1,276	1,340	1,407	1,477	1,551

Exercice 28: L'iode 131

L'iode 131 est un isotope radioactif utilisé en médecine. Un patient prend une gélule contenant 0,01 mg d'iode 131 au début de son traitement. Chaque jour, la masse d'iode 131 diminue de 8 %. On note $u(n)$ la masse d'iode 131, en mg, présente dans le patient n jours après l'ingestion.

1. Donner $u(0)$ et $u(1)$.
2. Exprimer $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$, puis $u(n)$ en fonction de n.
3. Au bout de combien de jours la masse d'iode 131 devient-elle inférieure à 0,001 mg ?
4. On appelle *demi-vie* la durée nécessaire pour que la masse d'iode 131 soit divisée par deux. Entre quels nombres entiers de jours la demi-vie de l'iode 131 est-elle comprise ?

Pour les questions 3 et 4, on pourra utiliser le tableau suivant.

n	7	8	9	10	26	27	28	29
$0{,}92^n$	0,5578	0,5132	0,4722	0,4344	0,1144	0,1053	0,0968	0,0891

Exercice 29: Scintigraphie (d'après bac ST2S, Antilles, 2018)

Lors d'une scintigraphie cardiaque, on injecte au patient un échantillon d'un isotope du thallium d'activité radioactive 120 MBq (mégabecquerels). À chaque demi-vie, le thallium perd la moitié de son activité ; la demi-vie du thallium est de 3 jours. On note $A(n)$ l'activité de l'échantillon après n demi-vies.

1. Donner les valeurs de $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$ et $A(3)$.
2. Exprimer $A(n+1)$ en fonction de $A(n)$. En déduire la nature de la suite A et sa raison.
3. Justifier que la suite A est décroissante.
4. En calculant les termes de proche en proche (on divise par 2 à chaque fois), déterminer le nombre de jours au bout duquel l'activité devient inférieure à 0,25 MBq.
5. Donner l'expression de $A(n)$ en fonction de n. Écrire la formule à taper dans une cellule de tableur pour obtenir l'activité au bout de 20 demi-vies. On obtient environ 0,000 114 MBq : que peut-on en conclure ?

4 Problèmes de synthèse

Exercice 30: Trois termes consécutifs

1. Les nombres -5, 8 et 21 sont trois termes consécutifs d'une suite. Cette suite pourrait-elle être arithmétique ? Géométrique ?
2. Mêmes questions avec -5, 10 et -20.
3. Mêmes questions avec 2 364 510 ; 3 475 621 ; 4 586 732.

Exercice 31: Deux contrats de location

La location annuelle initiale d'une maison se monte à 7 000 €. Le locataire s'engage à louer durant 7 années complètes. Le propriétaire lui propose deux contrats.

Contrat n° 1 : le loyer augmente chaque année de 5 % par rapport au loyer de l'année précédente. On note $u(1) = 7\,000$ le loyer de la 1re année et $u(n)$ le loyer de la n-ième année.

a) Exprimer $u(n)$ en fonction de n.
b) Calculer le loyer de la 7e année.
c) Calculer la somme payée au total au bout de 7 années d'occupation.

Contrat n° 2 : le loyer augmente chaque année de 400 €. On note $v(1) = 7\,000$ le loyer de la 1re année et $v(n)$ le loyer de la n-ième année. Mêmes questions a), b), c).

Conclusion : quel contrat est le plus avantageux pour le locataire ?

Données :

k	0	1	2	3	4	5	6
$1{,}05^k$ (arrondi)	1	1,05	1,1025	1,15763	1,21551	1,27628	1,34010

et $1 + 1{,}05 + 1{,}05^2 + 1{,}05^3 + 1{,}05^4 + 1{,}05^5 + 1{,}05^6 \approx 8{,}142$.

Exercice 32: La plante invasive (d'après bac STI2D, Métropole, 2019)

Le conservatoire des espaces naturels d'une région gère une zone protégée de 1 800 hectares. Une plante invasive y occupe une surface qui augmente de 5 % chaque année. Fin 2020, la plante occupe 90 hectares ; le conservatoire décide d'en éliminer 10 hectares par an à partir de 2021. On note $u(n)$ l'aire, en hectares, de la surface occupée par la plante en $2020 + n$.

1. Que vaut $u(0)$? Montrer que $u(1) = 84{,}5$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u(n+1) = 1{,}05\,u(n) - 10$.
3. Donner une valeur arrondie au millième de $u(2)$ et de $u(3)$.
4. La suite u est-elle arithmétique ? Géométrique ? On donne $\dfrac{u(1)}{u(0)} \approx 0{,}939$ et $\dfrac{u(2)}{u(1)} \approx 0{,}932$.
5. Le plan d'éradication prendra fin quand l'aire occupée sera inférieure à 6 hectares. Compléter le programme Python ci-dessous pour qu'à la fin, la variable `n` contienne le nombre d'années que durera le plan, puis déterminer en quelle année ce plan prendra fin.

```
u = 90
n = 0
while ..........:
    u = ..........
    n = n + 1
print(n)
```

On donne les valeurs suivantes, arrondies au millième :

n	8	9	10	11	12
$u(n)$	37,480	29,354	20,822	11,863	2,456