

Fonctions polynômes de degré 2, cours, 1 STMG

Table des matières

1	Définition et forme factorisée	2
2	Représentation graphique et variations	3
3	Signe	6

1 Définition et forme factorisée

Définition :

On appelle *fonction polynôme du second degré* toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'écrit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des réels fixés et $a \neq 0$.

Propriété [automatismes] :

Pour tous les nombres réels a , b et k :

$$k(a + b) = ka + kb$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

forme factorisée, produit

forme développée, somme

Propriété [automatismes] :

Pour tous les nombres réels a et b on a les *identités remarquables* suivantes :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

forme factorisée, produit

forme développée, somme

Propriété :

Soient a , x_1 et x_2 des réels. La fonction f définie par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ est une fonction polynôme du second degré. L'écriture $a(x - x_1)(x - x_2)$ est la forme factorisée de cette fonction.

Preuve :

Pour tous les réels x ,

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = ax^2 - ax_1x - ax_2x + ax_1x_2 = ax^2 + (ax_1 + ax_2)x + ax_1x_2.$$

En posant $b = ax_1x_2$ et $c = ax_1x_2$ on obtient $a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + bx + c$ donc une fonction polynôme du second degré.

2 Représentation graphique et variations

Propriété :

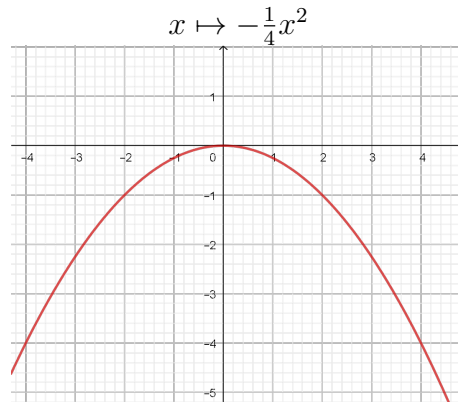
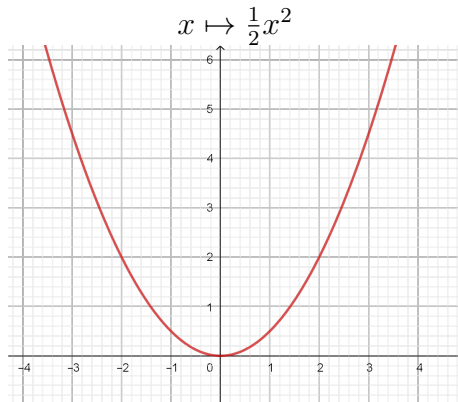
La représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto ax^2$ est une *parabole* de sommet le point $O(0;0)$ et

- Si $a > 0$, f est décroissante sur $] -\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

La parabole représentant f a donc ses branches « tournées vers le haut » ;

- si $a < 0$, f est croissante sur $] -\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$.

La parabole a ses branches « tournées vers le bas ».



Propriété :

La représentation graphique de la fonction $x \mapsto ax^2 + b$ est une *parabole* de *sommet* $S(0;b)$.

La fonction $x \mapsto ax^2 + b$ a les mêmes variations que la fonction $x \mapsto ax^2$: la parabole représentant $x \mapsto ax^2 + b$ est tournée dans le même sens que la parabole représentant $x \mapsto ax^2$.

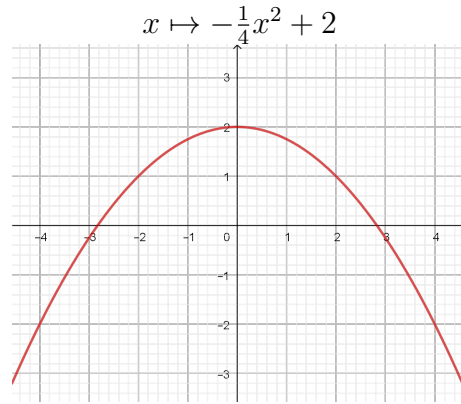
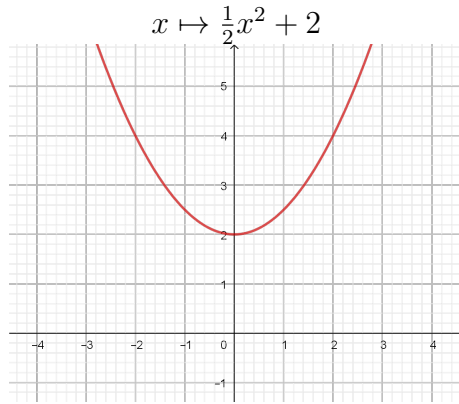
Synthèse :

Si $a > 0$,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$ b $\nearrow$		

et si $a < 0$,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$ b $\searrow$		

**Propriété :**

La fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ a les mêmes variations que $x \mapsto ax^2$.

La représentation graphique de la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ est une *parabole*

- Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut ;
- si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas. La représentation graphique d'une fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est donc une *parabole*

Propriété [automatismes] :

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Exemples [Résolution d'équations du second degré] :

- Résolution de l'équation $(3x + 2)(4x - 3) = 0$ dans l'ensemble des réels. D'après la propriété énoncée, $3x + 2 = 0$ ou $4x - 3 = 0$ c'est à dire $3x = -2$ ou $4x = 3$ donc encore $x = \frac{-2}{3}$ ou $x = \frac{3}{4}$. L'équation $(3x + 2)(4x - 3) = 0$ a donc pour solutions $\frac{-2}{3}$ et $\frac{3}{4}$.
- Résolution de l'équation $(3x + 2)(2x - 1) - x(3x + 2) = 0$ dans l'ensemble des réels. Ici, l'équation n'est pas factorisée. La développer ne permet pas de résoudre l'équation car on trouve $3x^2 - x - 2 = 0$ qu'on ne sait pas résoudre. Il faut donc la factoriser : l'équation donne alors $(3x + 2)(2x - 1 - x) = 0$ c'est à dire $(3x + 2)(x - 1) = 0$ qui se résout en utilisant la propriété énoncé ci-dessus. On a donc $3x + 2 = 0$ ou $x - 1 = 0$ donc $x = \frac{-2}{3}$ ou $x = 1$.
- Résolution de l'équation $x^2 + 4x + 4 = 0$. Ici encore, l'équation n'est pas factorisée. Il n'y a pas de facteur commun mais une identité remarquable apparaît $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$. On résout donc l'équation $(x + 2)^2 = 0$ qui donne $x + 2 = 0$ donc $x = -2$.

Propriété et définition :

Les points d'intersection de la parabole avec l'axes des abscisses sont les points de coordonnées $(x_1; 0)$ et $(x_2; 0)$. Si $x_1 = x_2$, il n'y a qu'un seul point d'intersection.

Les valeurs x_1 et x_2 sont appelées *racines du polynôme*. Ce sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Dans le cas où $x_1 = x_2$, on dit qu'il y a une *racine double*.

Preuve :

$$f(x) = 0 \text{ équivaut à } a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

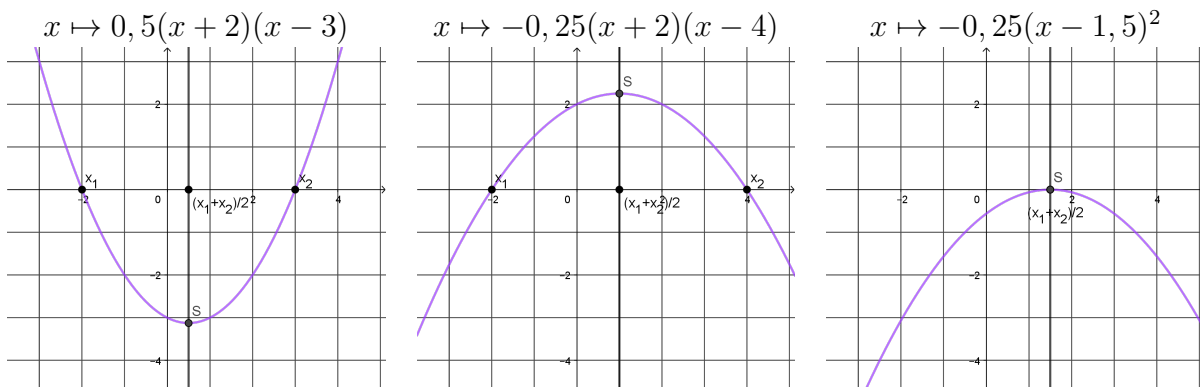
c'est à dire $x - x_1 = 0$ ou $x - x_2 = 0$

c'est à dire encore $x = x_1$ ou $x = x_2$.

Propriété :

- La parabole représentant $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.
- L'axe de symétrie passe par le milieu de $[AB]$;
- L'axe de symétrie passe par le sommet de la parabole ;
- Si $a > 0$, la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ admet un minimum en $\frac{x_1 + x_2}{2}$;
- Si $a < 0$, la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ admet un maximum en $\frac{x_1 + x_2}{2}$.

Le point d'abscisse $\frac{x_1 + x_2}{2}$ est le *sommet* de la parabole.



3 Signe

Propriété :

On suppose $x_1 \leq x_2$.

- Si $a > 0$, la fonction est positive sur $] -\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et négative sur $[x_1; x_2]$;
- si $a < 0$, la fonction est négative sur $] -\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et positive sur $[x_1; x_2]$;

Exemple [Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré] :

On considère la fonction $x \mapsto 5(2x - 3)(x - 1)$.

- $2x - 3 = 0$ équivaut à $2x = 3$ donc à $x = \frac{3}{2}$
 $x - 1 = 0$ pour $x = 1$.

On a donc $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$ et $a = 5$

- On fait un tableau de signes ; les lignes 2,3 et 4 ne sont pas nécessaires mais permettent une vérification :

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
5		$+$	$+$	$+$
$x - 1$		$-$	0	$+$
$2x - 3$		$-$	$-$	0
$5(2x - 3)(x - 1)$		$-$	$+$	$-$

Propriété :

Si x_1 est une racine de la fonction polynôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$, alors la fonction est factorisable par $x - x_1$ c'est à dire peut s'écrire $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_2 est un réel restant à déterminer.

Exemple [Savoir factoriser en utilisant une racine] :

On considère la fonction $f : x \mapsto 3x^2 - 18x + 15$.

- 1 est une racine évidente : en effet, $f(1) = 3 \times 1^2 - 18 + 15 = 0$;
- $f(x)$ peut donc s'écrire d'après la propriété $5(x - 1)(x - x_2)$.

On développe $5(x - 1)(x - x_2) = 5(x^2 - x - x_2x + x_2) = 5x^2 - 5x - 5x_2x + 5x_2$.

On doit avoir $5x_2 = 15$ donc $x_2 = \frac{15}{5}$ donc $x_2 = 3$.