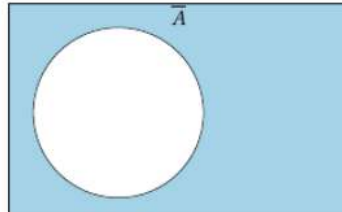
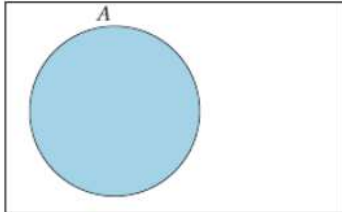


Probabilités conditionnelles

I Rappels

On considère deux événements A et B d'un même univers Ω .

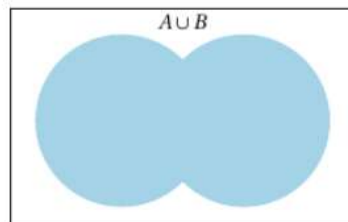
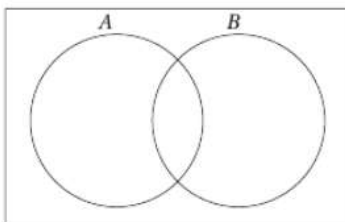
Définition 1 : On appelle **événement contraire** de A , l'événement constitué des issues n'appartenant pas à A . On le note $\bar{A}$.



Exemple : Dans un lancer de dé, on considère l'événement A "Obtenir un 1 ou un 2".

L'événement contraire est $\bar{A}$ "Obtenir un 3, 4, 5 ou 6".

Définition 2 : L'événement " A ou B ", noté $A \cup B$ et se lit " A union B ", contient les issues appartenant à A ou à B .

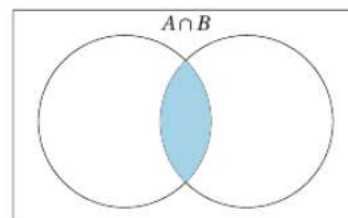
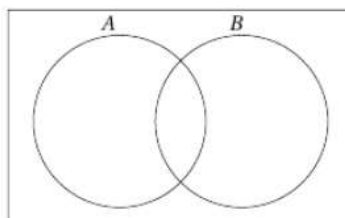


Remarque : Les éléments de $A \cup B$ peuvent appartenir à la fois à A et à B .

Exemple : Dans un lancer de dé, on appelle A l'événement "Obtenir 1,2 ou 3" et B l'événement "Obtenir 3 ou 5".

L'événement $A \cup B$ est "Obtenir 1, 2, 3 ou 5".

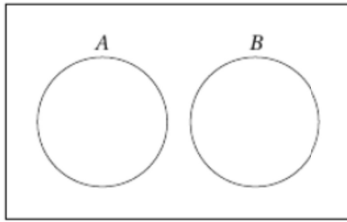
Définition 3 : L'événement " A et B ", noté $A \cap B$ et se lit " A inter B ", contient les issues communes à A et B .



Exemple : Dans un lancer de dé, on appelle A l'événement "Obtenir 1,2 ou 3" et B l'événement "Obtenir 3 ou 5".

L'événement $A \cap B$ est "Obtenir 3".

Définition 4 : Les événements A et B sont dits **disjoints** ou **incompatibles** si l'événement $A \cap B$ est impossible.



Exemple : Dans un lancer de dé, les événements "Obtenir 1 ou 2" et "Obtenir 4 ou 5" sont incompatibles.

Remarques :

- Lorsque deux événements A et B sont disjoints on note $A \cap B = \emptyset$ où $\emptyset$ signifie "ensemble vide".
- Pour tout événement A , les événements A et $\bar{A}$ sont disjoints.

Propriété 1 : Dans une situation d'équiprobabilité on a :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre total d'issues}}$$

Exemple : Dans un jeu de 32 cartes, on considère l'événement A "tirer un roi", on a $p(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Propriété 2 : Soit A un événement d'une expérience aléatoire d'univers Ω .

1. $0 \leq p(A) \leq 1$
2. $p(\Omega) = 1$
3. $p(\emptyset) = 0$
4. $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

Propriété 3 : On considère deux événements A et B d'un univers Ω .

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

II Probabilités conditionnelles

Définition 5 : On considère deux événements A , tel que $p(A) \neq 0$, et B .
On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A** le nombre

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Exemple : On tire une carte noire d'un jeu de 32 cartes. On veut déterminer la probabilité que cette carte soit un roi.
On considère alors les événements :

- N : "la carte tirée est noire";
- R : "la carte tirée est un roi".

On veut donc calculer $p_N(R) = \frac{p(N \cap R)}{p(N)}$

Or $p(N) = \frac{1}{2}$ et

$$p(N \cap R) = \frac{2}{32} \\ = \frac{1}{16}$$

Donc

$$p_N(R) = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} \\ = \frac{1}{16} \times 2 \\ = \frac{1}{8}$$

Les probabilités conditionnelles suivent les mêmes règles que les probabilités en général, c'est-à-dire :

Propriété 4 : On considère deux événements A , tel que $p(A) \neq 0$, et B .

1. $0 \leq p_A(B) \leq 1$
2. $p_A(\emptyset) = 0$
3. $p_A(A) = 1$
4. $p_A(B) + p_A(B^c) = 1$

Propriété 5 : On considère deux événements A et B de probabilités tous les deux non nulles.

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)$$

Exemple : On considère deux événements A et B tels que $p(A) = 0,7$ et $p_A(B) = 0,4$

On a alors :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) \\ = 0,7 \times 0,4 \\ = 0,28$$

Preuves propriétés 4 et 5 :

Preuve Propriété 4

1. $p(A \cap B) \geq 0$ et $p(A) \geq 0$ donc $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \geq 0$.

De plus $A \cap B$ est inclus dans A . Par conséquent $p(A \cap B) \leq p(A)$ et $p_A(B) \leq 1$.

2. $p(A \cap \emptyset) = 0$ donc $p_A(\emptyset) = 0$

3. On a

$$\begin{aligned} p_A(A) &= \frac{p(A \cap A)}{p(A)} \\ &= \frac{p(A)}{p(A)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

4. On a

$$\begin{aligned} p_A(B) + p_A(B^c) &= \frac{p(A \cap B)}{p(A)} + \frac{p(A \cap B^c)}{p(A)} \\ &= \frac{p(A \cap B) + p(A \cap B^c)}{p(A)} \\ &= \frac{p(A)}{p(A)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

[collapse]

Preuve Propriété 5

Par définition $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$ donc $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$.

De même $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ donc $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$.

[collapse]

*