

Fonctions polynômes de degré 3, cours, 1 STMG

1 Définition et forme factorisée

Définition :

On appelle *fonction polynôme du troisième degré* toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'écrit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont des réels fixés et $a \neq 0$.

Propriété :

Soient a, x_1 et x_2 des réels. La fonction f définie par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ est une fonction polynôme du troisième degré. L'écriture $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ est la forme factorisée de cette fonction.

Preuve :

Pour tous les réels x ,

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2)(x - x_3) = (ax^2 - ax_1x - ax_2x + ax_1x_2)(x - x_3) = ax^3 - ax_1x^2 - ax_2x^2 + ax_1x_2x - ax_3x^2 + ax_1x_3x + ax_2x_3x - ax_1x_2x_3.$$

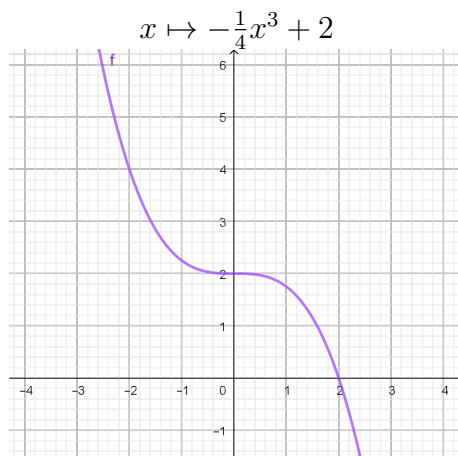
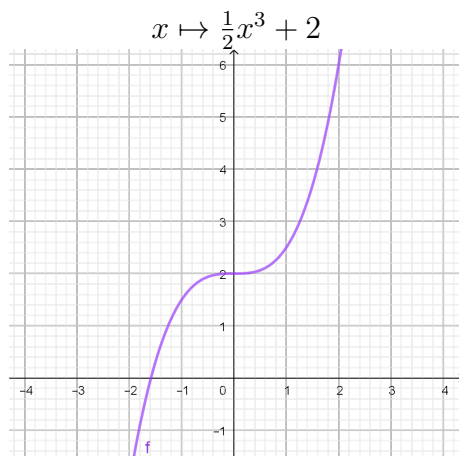
On obtient donc une fonction polynôme du troisième degré.

2 Représentation graphique et variations

Propriété :

Les fonction $f : x \mapsto ax^3$ et $f : x \mapsto ax^3 + b$ où a et b sont deux réels fixés est telle que :

- Si $a > 0$, f est croissante sur $] -\infty; +\infty[$
- si $a < 0$, f est décroissante sur $] -\infty; +\infty[$



Propriété et définition :

Pour tout réel k , l'équation $x^3 = k$ admet une unique solution appelée *racine cubique de k* et notée $\sqrt[3]{k}$ ou $k^{\frac{1}{3}}$.

Synthèse :Si $a > 0$,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		b	

et si $a < 0$,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		b	

3 Étude de signe

Propriété :

Si f est une fonction polynôme de degré 3 de forme factorisée $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ (x_1, x_2, x_3 éventuellement confondus) alors l'équation $f(x) = 0$ admet pour unique solutions x_1, x_2, x_3 . Le polynôme f admet donc pour racines x_1, x_2 et x_3 .

Exemple [Savoir étudier le signe d'une fonction polynôme de degré 3] :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0,5(x + 4)(x - 3)(x + 2)$.

- On résout l'équation $f(x) = 0$:

$$x + 4 = 0 \text{ ou } x - 3 = 0 \text{ ou } x + 2 = 0$$

c'est à dire $x = -4$ ou $x = 3$ ou $x = -2$. La fonction polynôme f admet donc trois racines : -4, -2 et 3.

- On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	-4	-2	3	$+\infty$
$-0,5$		-	-	-	-
$x + 4$	-	0	+	+	+
$x + 2$	-	-	0	+	+
$x - 3$	-	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	0	-

f est donc positive sur $] -\infty; -4[\cup] -2; 3[$ et négative sur $] -4; -2[\cup] 3; +\infty[$.

