

Chapitre 8 : Arbres pondérés et variables aléatoires

I Expérience aléatoire à plusieurs épreuves indépendantes et arbre pondéré

1) Épreuves indépendantes :

Définition : Deux épreuves sont dites indépendantes si le résultat de l'une n'a aucune influence sur sur le résultat de l'autre.

Exemple : Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules noires. On tire successivement deux boules avec remise.

Il y aura exactement le même nombre de boules de chaque couleur dans l'urne lors des deux tirages. Les deux tirages se font dans les mêmes conditions, les deux épreuves sont bien indépendantes.

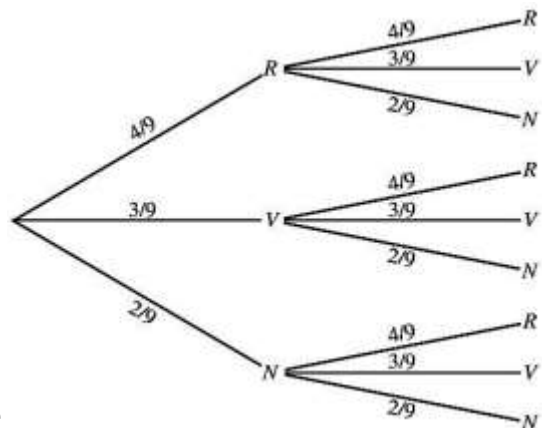
2) Représentation d'une expérience aléatoire à plusieurs épreuves indépendantes par un arbre pondéré

Exemple de cours : On reprend la situation de l'exemple précédent.

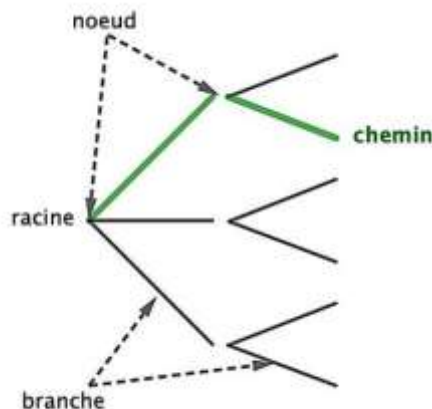
On commence par calculer la probabilité, lors d'un tirage, d'obtenir chacune des issues : une boule rouge (R), une boule verte (V), ou une boule noire (N). Il y a 9 boules dans l'urne et on considère que chaque boule a la même chance d'être choisie. On peut donc parler de situation d'équiprobabilité donc :

$$P(R) = \frac{4}{9} ; \quad P(V) = \frac{3}{9} \quad \text{et} \quad P(N) = \frac{2}{9} .$$

Ensuite on représente la situation par un arbre dit pondéré : sur chaque « branche » on inscrit la probabilité correspondant à l'issue notée au bout de cette branche.



Vocabulaire à retenir concernant un arbre pondéré :



3) Utiliser un arbre pondéré pour calculer des probabilités

Les 3 règles pour bien utiliser un arbre pondéré :

Règle 1 : La somme des probabilités inscrites au départ d'un même nœud est égale à 1.

Règle 2 : La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités inscrites sur ses branches.

Règle 3 : La probabilité d'un évènement correspondant à plusieurs chemins est la somme des probabilités de ces chemins.

Exemple : En reprenant la situation de l'exemple plus haut.

Soit les évènements suivants :

A : « tirer deux boules noires »

B : « tirer une boule noire et une boule rouge ».

Pour calculer $P(A)$, on observe qu'il n'y a qu'un seul chemin qui réalise A. Il suffit donc de multiplier les probabilités des branches de ce chemin :

$$P(A) = \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{4}{81} \approx 0,05$$

Pour calculer $P(B)$, on observe qu'il y a 2 chemins qui réalisent l'évènement B. Il faut donc ajouter les probabilités de ces deux chemins :

$$P(B) = \frac{4}{9} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{4}{9}$$

$$P(B) = \frac{8}{81} + \frac{8}{81} = \frac{16}{81} \approx 0,2$$