

Cours : Dérivation

I. Nombre dérivé : interprétation graphique

1. Notion de nombre dérivé

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle et a un réel fixé de cet intervalle.

C_f est la courbe représentative de la fonction f .

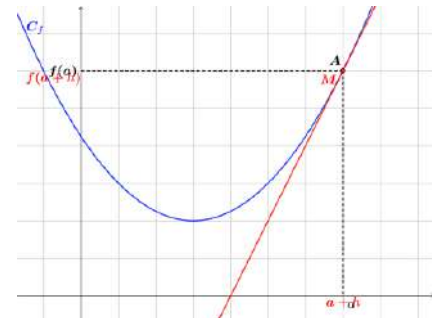
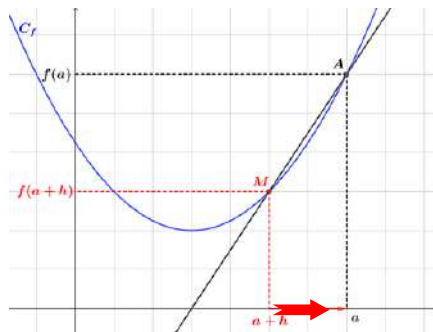
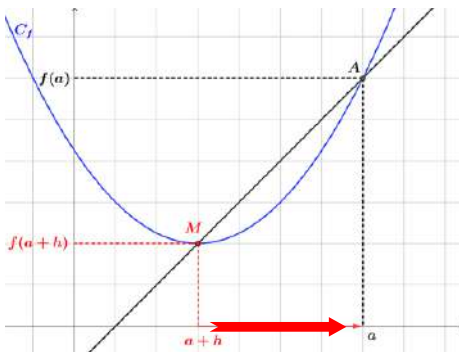
On admet que la tangente à C_f au point d'abscisse a existe.

Le nombre dérivé de la fonction f en a , noté $f'(a)$ est **le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse a .**

Comprendre la notion de tangente (facultatif dans le cours à recopier)

Soit $A(a ; f(a))$ un point de C_f

Soit $M(a + h ; f(a + h))$ un point de C_f h est un réel



(AM) est une sécante à C_f de coefficient directeur : $\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

On rapproche M de A ; c'est à dire que l'abscisse de M se rapproche de l'abscisse de A .

Le coefficient de **cette sécante « limite », appelée tangente**, c'est à dire quand M est sur A , est donc la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0.

On peut donc dire que **$f'(a)$ est la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0.**

Exemple type : lecture graphique d'un nombre dérivé

On a tracé les tangentes à C_f aux points A d'abscisse 5, au point B d'abscisse -1 et au point C d'abscisse 1. Lire graphiquement $f'(5)$, $f'(-1)$ et $f'(1)$.

On lit le coefficient directeur de T_5

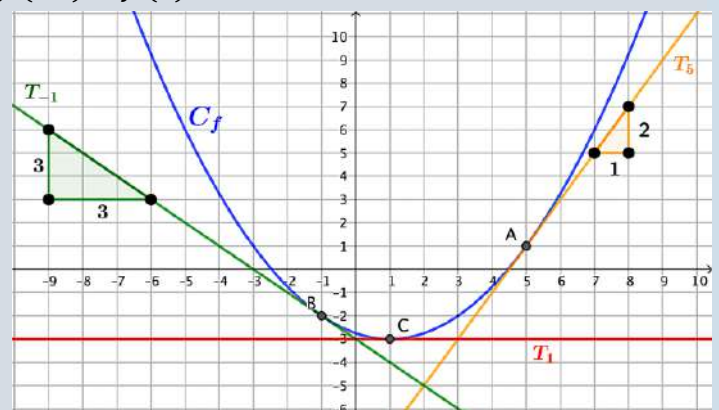
$$a = +\frac{2}{1} = 2 \text{ donc } f'(5) = 2$$

On lit le coefficient directeur de T_{-1}

$$a = -\frac{3}{3} = -1 \text{ donc } f'(-1) = -1$$

On lit le coefficient directeur de T_1

$a = 0$ car la droite est horizontale
Donc $f'(1) = 0$



2. Équation réduite de la tangente en un point

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle et a un réel fixé de cet intervalle.

C_f est la courbe représentative de la fonction f .

On admet que la tangente à C_f au point d'abscisse a existe.

L'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Exemple type

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$

On sait que $f'(2) = 1$

Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.

On connaît $f'(2)$, on va donc calculer $f(2)$

$$f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 4 - 6 + 1 = -1$$

On sait que l'équation de la tangente est : $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

Il ne reste plus qu'à remplacer $f'(2)$ et $f(2)$ par leur valeur respective.

$$T_2 : y = 1(x - 2) - 1$$

$$T_2 : y = x - 2 - 1$$

$$T_2 : y = x - 3$$

Pour déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse a il faut connaître $f'(a)$ et $f(a)$.