

❄️ Chapitre 11 ❄️

Variables aléatoires

I. Variables aléatoires réelles

1. Notions de variables aléatoire réelle

❄️ **Définition 1:**

Soit Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire (Ω est l'univers). Une variable aléatoire sur Ω est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

🍃 **Exemple 1:**

Soit l'expérience aléatoire : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat ». L'ensemble de toutes les issues possibles, l'univers, est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

❄️ **Définition 2:**

Soient X une variable aléatoire définie sur Ω et x un réel.

1. L'évènement « X prend la valeur x » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe le réel x .
2. L'évènement « X prend des valeurs supérieures ou égales à x » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe un réel supérieur ou égal à x .
3. L'évènement « X prend des valeurs inférieures ou égales à x » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe un réel inférieures ou égal à x .

🍃 **Exemple 2:**

On considère le jeu suivant : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat ».

- Si le résultat est pair, on gagne 2€.
- Si le résultat est 1, on gagne 3€.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4€.

On peut définir ainsi une variable aléatoire X sur $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ qui peut prendre les valeurs 2, 3 ou -4.

- $\{X = 2\}$ est réalisé lorsque l'on obtient les valeurs 2, 4 et 6.
- $\{X \leq 2\}$ est réalisé lorsque le dé affiche les valeurs 2, 3, 4, 5 et 6.
- $\{X \geq -4\}$ est réalisé pour toutes les valeurs (c'est un évènement certain).

2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

❄️ **Définition 3:**

Soit X une variable aléatoire sur Ω prenant les valeurs $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Lorsqu'à chaque valeur x_i , on associe la probabilité $p_i = p(X = x_i)$, on définit la loi de probabilité de X .

On présente souvent la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Les probabilités obtenues sont telles que : $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Exemple 3:

On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent. Chaque issue du lancer de dé est équiprobable.

La probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur 2 est égale à $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. On note : $P(X = 2) = \frac{1}{2}$.

De même : $P(X = 3) = \frac{1}{6}$ et $P(X = -4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

On peut résumer les résultats dans un tableau :

Ce tableau résume la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

x_i	-4	2	4	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

Méthode 1 : Déterminer une loi de probabilité

Soit l'expérience aléatoire : « On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. »

On considère le jeu suivant : si on tire un cœur, on gagne 2€, si on tire un roi, on gagne 5€ et sinon on perd 1€.

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.

1. Déterminons la loi de probabilité de X .

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 2, 5, -1 mais aussi 7.

En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne 5(roi) + 2(cœur) = 7€.

- Si la carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), $X = 2$ et $P(X = 2) = \frac{7}{32}$.
- Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur), $X = 5$ et $P(X = 5) = \frac{3}{32}$.
- Si la carte tirée est le roi de cœur, $X = 7$ et $P(X = 7) = \frac{1}{32}$.
- Si la carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, $X = -1$ et $P(X = -1) = \frac{21}{32}$.

La loi de probabilité de X est :

x_i	-1	2	5	7	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

2. Calculons $P(X \geq 5)$ et interprétons le résultat.

$$P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 7) = \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}. \text{ La probabilité de gagner plus de 5€ est égale à } \frac{1}{8}.$$

II. Espérance d'une variable aléatoire réelle**Définition 4:**

L'espérance mathématique de la loi de probabilité de X est :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

Méthode 2 : Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire réelle

Reprenons l'expérience vu précédemment et calculons son espérance :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 = \frac{21}{32} \times (-1) + \frac{7}{32} \times 2 + \frac{3}{32} \times 5 + \frac{1}{32} \times 7 = \frac{15}{32}$$

L'espérance est égale à $\frac{15}{32} \approx 0,5$ ce qui signifie qu'en jouant un très grand nombre de fois, on peut espérer gagner en moyenne 0,50€ par partie.