

Exercices finaux

Dérivation

1ère STMG

Exercice 1: Oeufs de Pâques

Une entreprise produit et vend des œufs de Pâques. Elle peut en produire entre 0 et 4000. Le coût de production, en milliers d'euros, est donné par :

$$C(x) = 2x^2 + 2x - 2$$

où x est le nombre de milliers d'œufs produits.

Un millier d'œufs est vendu 6 milliers d'euros.

- a) Quel est le coût de production et la recette pour 3000 œufs vendus ?
- b) Exprimer la recette $R(x)$ en fonction de x , le nombre de milliers d'œufs vendus.
- c) En déduire que le bénéfice, en milliers d'euros, correspond à la fonction :

$$B(x) = -2x^2 + 4x + 2$$

- d) Calculer, pour tout $x \in [0; 4]$, la dérivée de B , notée $B'(x)$.
- e) Dresser le tableau de signe de B' sur $[0; 4]$ puis en déduire le tableau de variation de B sur $[0; 4]$.
- f) Quel est le bénéfice maximal ? Combien d'œufs faut-il vendre alors ?

Correction de l'exercice 1

- a) Pour 3000 œufs vendus, on a $x = 3$.

Le coût de production est :

$$C(3) = 2 \times 3^2 + 2 \times 3 - 2$$

$$C(3) = 18 + 6 - 2 = 22$$

Donc le coût de production est de 22 milliers d'euros.

La recette est :

$$3 \times 6 = 18$$

Donc la recette est de 18 milliers d'euros.

- b) Un millier d'œufs est vendu 6 milliers d'euros.

Donc, pour x milliers d'œufs vendus :

$$R(x) = 6x$$

- c) Le bénéfice s'obtient en soustrayant le coût de production à la recette :

$$B(x) = R(x) - C(x)$$

$$B(x) = 6x - (2x^2 + 2x - 2)$$

$$B(x) = 6x - 2x^2 - 2x + 2$$

$$B(x) = -2x^2 + 4x + 2$$

d) On dérive B :

$$B'(x) = -2 \times 2x + 4$$

$$B'(x) = -4x + 4$$

e) On cherche le signe de $B'(x)$:

$$-4x + 4 = 0$$

$$-4x = -4$$

$$x = 1$$

Comme B' est une fonction affine de coefficient directeur $-4 < 0$, elle est positive avant 1 et négative après 1.

Donc :

x	0	1	4
$B'(x)$	+	0	-
$B(x)$	2	4	-14

On calcule :

$$B(0) = -2 \times 0^2 + 4 \times 0 + 2 = 2$$

$$B(1) = -2 \times 1^2 + 4 \times 1 + 2 = 4$$

$$B(4) = -2 \times 4^2 + 4 \times 4 + 2 = -14$$

La fonction B est donc croissante sur $[0; 1]$, puis décroissante sur $[1; 4]$.

f) Le bénéfice maximal est donc :

$$B(1) = 4$$

Le bénéfice maximal est de 4 milliers d'euros, c'est-à-dire 4000 euros.

Il faut produire et vendre 1 millier d'œufs, donc 1000 œufs.

Exercice 2: Variations d'un polynôme de degré 3

Une entreprise fabrique et vend une quantité x d'objets. La capacité maximale de production de l'entreprise est de 21 objets. Le bénéfice réalisé en euros pour x objets produits et vendus est de :

$$B(x) = -2x^3 + 54x^2 - 270x - 80$$

1. Calculer $B'(x)$.
2. Montrer que $B'(x) = -6(x - 3)(x - 15)$.
3. Etudier le signe de $B'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction B .
4. Combien l'entreprise doit-elle produire et vendre d'objets pour obtenir un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice maximal ?

Correction de l'exercice 2

a) On a :

$$B(x) = -2x^3 + 54x^2 - 270x - 80$$

Donc :

$$B'(x) = -2 \times 3x^2 + 54 \times 2x - 270$$

$$B'(x) = -6x^2 + 108x - 270$$

b) On développe l'expression proposée :

$$-6(x-3)(x-15)$$

$$= (-6x + 18)(x - 15)$$

$$= -6x^2 + 90x + 18x - 270$$

$$= -6x^2 + 108x - 270$$

Donc :

$$B'(x) = -6(x-3)(x-15)$$

c) On étudie le signe de :

$$B'(x) = -6(x-3)(x-15)$$

Les racines sont 3 et 15.

Comme le coefficient dominant est négatif, $B'(x)$ est négatif à l'extérieur des racines et positif entre les racines.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	3	15	21		
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$B(x)$	-80			1270		
		-458			-458	

d) Le bénéfice maximal est donc :

$$1270$$

L'entreprise doit produire et vendre 15 objets pour obtenir un bénéfice maximal de 1270 euros.