

Cours : Dérivation

I. Nombre dérivé : interprétation graphique

1. Notion de nombre dérivé

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle et a un réel fixé de cet intervalle.

C_f est la courbe représentative de la fonction f .

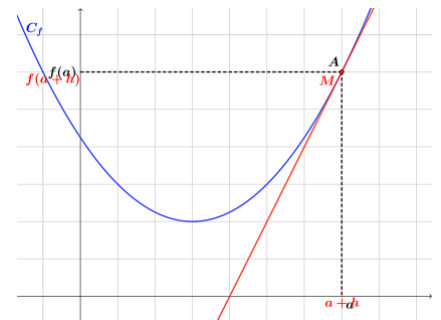
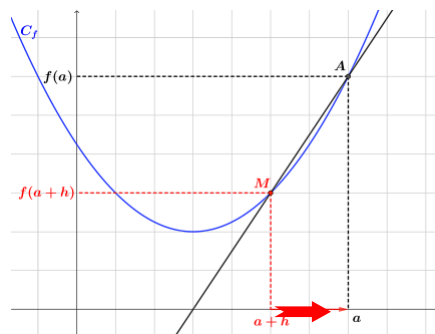
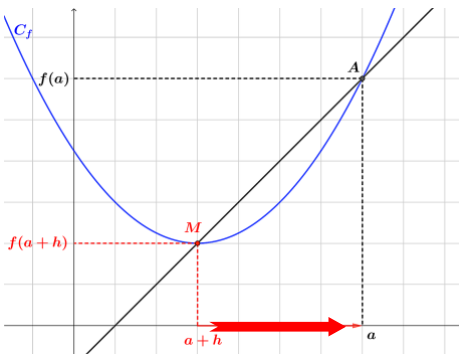
On admet que la tangente à C_f au point d'abscisse a existe.

Le nombre dérivé de la fonction f en a , noté $f'(a)$ est **le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse a .**

Comprendre la notion de tangente (facultatif dans le cours à recopier)

Soit $A(a ; f(a))$ un point de C_f

Soit $M(a + h ; f(a + h))$ un point de C_f h est un réel



(AM) est une sécante à C_f de coefficient directeur : $\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

On rapproche M de A ; c'est à dire que l'abscisse de M se rapproche de l'abscisse de A .

Le coefficient de **cette sécante « limite », appelée tangente**, c'est à dire quand M est sur A , est donc la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0.

On peut donc dire que **$f'(a)$ est la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0.**

Exemple type : lecture graphique d'un nombre dérivé

On a tracé les tangentes à C_f aux points A d'abscisse 5, au point B d'abscisse -1 et au point C d'abscisse 1. Lire graphiquement $f'(5)$, $f'(-1)$ et $f'(1)$.

On lit le coefficient directeur de T_5

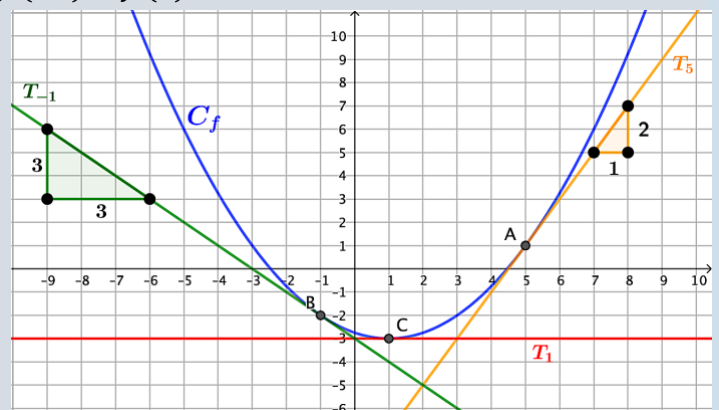
$$a = +\frac{2}{1} = 2 \text{ donc } f'(5) = 2$$

On lit le coefficient directeur de T_{-1}

$$a = -\frac{3}{3} = -1 \text{ donc } f'(-1) = -1$$

On lit le coefficient directeur de T_1

$a = 0$ car la droite est horizontale
Donc $f'(1) = 0$



2. Équation réduite de la tangente en un point

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle et a un réel fixé de cet intervalle.

C_f est la courbe représentative de la fonction f .

On admet que la tangente à C_f au point d'abscisse a existe.

L'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Pour déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse a il faut connaître $f'(a)$ et $f(a)$.

Exemple type

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$

On sait que $f'(2) = 1$

Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.

On connaît $f'(2)$, on va donc calculer $f(2)$

$$f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 4 - 6 + 1 = -1$$

On sait que l'équation de la tangente est : $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

Il ne reste plus qu'à remplacer $f'(2)$ et $f(2)$ par leur valeur respective.

$$T_2 : y = 1(x - 2) - 1$$

$$T_2 : y = x - 2 - 1$$

$$T_2 : y = x - 3$$

II. Fonction dérivée

1. Définition

Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I ; c'est à dire que pour tout x appartenant à I f admet un nombre dérivé $f'(x)$.

La fonction qui à tout x associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f et est notée f' .

2. Dérivées des fonctions de références (à apprendre par cœur)

Toutes les fonctions si dessous sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$

Fonction f	Fonction f'
$f(x) = c$ avec c une constante réelle	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Exemples types

$f(x) = 3$ Calculer $f'(5)$

Pour tout réel x , $f'(x) = 0$ donc $f'(5) = 0$

$f(x) = x$ Calculer $f'(-4)$

Pour tout réel x , $f'(x) = 1$ donc $f'(-4) = 1$

$f(x) = x^2$ Calculer $f'(2)$

Pour tout réel x , $f'(x) = 2x$ donc $f'(2) = 2 \times 2 = 4$

$f(x) = x^3$ Calculer $f'(-1)$

Pour tout réel x , $f'(x) = 3x^2$

donc $f'(-1) = 3 \times (-1)^2 = 3 \times 1 = 3$

3. Dériver une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3

Théorème : Dérivée d'une somme ou d'un produit par une constante

u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I . k une constante réelle.

La fonction $u + v$ est dérivable et **sa dérivée est $u' + v'$**

La fonction $k \times u$ est dérivable et **sa dérivée est $k \times u'$** .

Exemples types

Soit f la fonction définie par $f(x) = 4x^2 - 3x + 4$

Soit g la fonction définie par $g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x + 10$

Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$

$$f(x) = 4x^2 - 3x + 4$$

Si on pose $u(x) = x^2$ $v(x) = x$ $w(x) = 4$

Alors $u'(x) = 2x$ $v'(x) = 1$ et $w'(x) = 0$

D'après le théorème précédent :

Comme $f(x) = 4 \times u(x) - 3 \times v(x) + w(x)$ alors $f'(x) = 4 \times u'(x) - 3 \times v'(x) + w'(x)$

C'est à dire : $f'(x) = 4 \times 2x - 3 \times 1 + 0 = 8x - 3$

$$g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x + 10$$

$$g'(x) = 2 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 4 \times 1 + 0 = 6x^2 - 10x + 4$$

III. Application : sens de variation

1. Lien entre signe de la dérivée et sens de variation

Propriété

Si f est croissante sur un intervalle I alors $f'(x) \geq 0$ sur I .

Si f est décroissante sur un intervalle I alors $f'(x) \leq 0$ sur I .

Si f est constante sur un intervalle I alors $f'(x) = 0$ sur I .

Propriété

Si $f'(x) \geq 0$ sur I alors **f est croissante sur I** .

Si $f'(x) \leq 0$ sur I alors **f est décroissante sur I** .

Si $f'(x) = 0$ sur I alors **f est constante sur I** .

Ce théorème va nous permettre de déterminer les variations d'une fonction en étudiant le signe de sa dérivée.

Avec des inégalités strictes :

Si $f'(x) > 0$ sur I alors **f est strictement croissante sur I** .

2. Étudier les variations d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3

a. Un exemple que l'on connaît bien : une fonction polynôme de degré 2

Étudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$

1^{ère} méthode (*celle que l'on a utilisé en début d'année et qui reste toujours valable*)

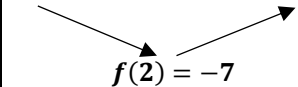
On reconnaît une fonction polynôme de degré 2 ; donc la courbe représentative de f est une parabole.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a = 3 \quad b = -12 \quad c = 5$$

Comme $a > 0$ alors on sait que la parabole est tournée vers le haut.

On sait également que l'abscisse du sommet est $\frac{-b}{2a} = \frac{12}{6} = 2$

On en déduit donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$			

2^{ème} méthode (*en utilisant la fonction dérivée*)

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 5$$

$$f'(x) = 3 \times 2x - 12 \times 1 + 0 = 6x - 12$$

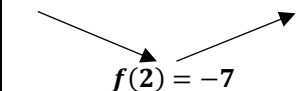
On étudie le signe de $6x - 12$.

On résout d'abord $6x - 12 = 0$ On obtient $x = 2$

$6x - 12$ est l'expression d'une fonction affine croissante dont la représentation graphique est une droite et qui coupe l'axe des abscisses en 2.

On en déduit que $6x - 12 < 0$ pour $x < 2$ et que $6x - 12 > 0$ pour $x > 2$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Remarque :

Le tableau de variations permet de lire que -7 est le minimum de f atteint pour $x = 2$

b. Avec une fonction polynôme de degré 3 : un exemple de type économique

Une entreprise fabrique et vend une quantité x d'objets. La capacité maximale de production de l'entreprise est de 21 objets.

Le bénéfice réalisé en euros par cette entreprise pour x objets produits et vendus est de :

$$B(x) = -2x^3 + 54x^2 - 270x - 80$$

1. Calculer $B'(x)$

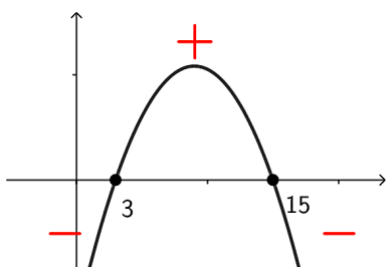
$$B(x) = -2x^3 + 54x^2 - 270x - 80$$

$$B'(x) = -2 \times 3x^2 + 54 \times 2x - 270 \times 1 - 0 = -6x^2 + 108x - 270$$

2. Montrer que $B'(x) = -6(x - 3)(x - 15)$

On va développer l'expression qui est proposée.

$$\begin{aligned} -6(x - 3)(x - 15) &= (-6x + 18)(x - 15) = -6x^2 + 90x + 18x - 270 \\ &= -6x^2 + 108x - 270 = B'(x) \end{aligned}$$



3. Étudier le signe de $B'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction B .

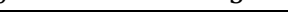
$$B'(x) = -6(x - 3)(x - 15)$$

On reconnaît une expression polynôme de degré 2 donc la courbe représentative est une parabole.

Les racines de $B'(x)$ sont 3 et 15. La parabole est tournée vers le bas car $-6 < 0$.

Le schéma ci-contre nous permet de retrouver le signe de $B'(x)$.

On en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	0	3	15	21	
$f'(x)$	—	0	+	0	—
$f(x)$	−80			1270	−458

4. Combien l'entreprise doit-elle produire et vendre d'objets pour obtenir un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice maximal ?

Le tableau de variations permet de lire que le bénéfice maximal est de 1270 euros pour 15 objets produits et vendus.