

Nombres réels

Chapitre : ensembles de nombres

Mathématiques – Seconde

Table des matières

1	Nombres entiers	1
1.1	Nombres entiers naturels	1
1.2	Nombres entiers relatifs	1
2	Nombres décimaux, nombres rationnels	2
2.1	Nombres décimaux	2
2.2	Nombres rationnels	2
3	Notion de nombres réels	3
3.1	Nombres irrationnels	3
3.2	Nombres réels	3
4	Classification des nombres	4

1 Nombres entiers

1.1 Nombres entiers naturels

Définition 1.1: Nombre entier naturel

Un **nombre entier naturel** est un nombre entier qui est positif.
L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}.$$

Exemple 1.2: Appartenance à $\mathbb{N}$

$4 \in \mathbb{N}$ (4 appartient à l'ensemble des entiers naturels)
 $-2 \notin \mathbb{N}$ (-2 n'appartient pas à l'ensemble des entiers naturels)

1.2 Nombres entiers relatifs

Définition 1.3: Nombre entier relatif

Un **nombre entier relatif** est un nombre entier qui est positif ou négatif.
L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}.$$

Exemple 1.4: Appartenance à $\mathbb{Z}$

$-2 \in \mathbb{Z}$ $5 \in \mathbb{Z}$ $0,33 \notin \mathbb{Z}$

2 Nombres décimaux, nombres rationnels

2.1 Nombres décimaux

Définition 2.1: Nombre décimal

Un **nombre décimal** est un nombre qui s'écrit avec un nombre **fini** de chiffres après la virgule.

L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemple 2.2: Appartenance à $\mathbb{D}$

$$\begin{array}{ll} 0,56 \in \mathbb{D} & 3 \in \mathbb{D} \\ \frac{1}{3} \notin \mathbb{D} \text{ car } \frac{1}{3} \approx 0,3333\dots & \frac{3}{4} \in \mathbb{D} \text{ car } \frac{3}{4} = 0,75 \end{array}$$

Remarque : Écriture d'un nombre décimal

Un nombre décimal peut toujours s'écrire sous la forme de la fraction d'un entier et d'une puissance de 10.

Par exemple : $2,36 = \frac{236}{100} = \frac{236}{10^2}$.

2.2 Nombres rationnels

Définition 2.3: Nombre rationnel

Un **nombre rationnel** est une fraction, c'est-à-dire un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec a un entier et b un entier non nul.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Exemple 2.4: Appartenance à $\mathbb{Q}$

$$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \quad 4 \in \mathbb{Q} \quad -4,8 \in \mathbb{Q} \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Démonstration. Démontrons que le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

On effectue une démonstration **par l'absurde** en supposant que $\frac{1}{3}$ est décimal. Si cette hypothèse conduit à une absurdité, cela prouvera qu'elle est fausse.

Supposons donc que $\frac{1}{3}$ est décimal. Alors, d'après la remarque précédente, il peut s'écrire sous la forme de la fraction d'un entier et d'une puissance de 10 :

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^p} \text{ avec } a \text{ entier et } p \text{ entier naturel.}$$

On en déduit $10^p = 3a$, donc 10^p est divisible par 3.

Or, un nombre est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3. La somme des chiffres de 10^p vaut 1, et 1 n'est pas divisible par 3 : c'est une contradiction.

Donc l'hypothèse posée au départ est fausse, et $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal. $\square$

3 Notion de nombres réels

3.1 Nombres irrationnels

Définition 3.1: Nombre irrationnel

Un **nombre irrationnel** est un nombre qui ne peut pas s'écrire à l'aide d'une fraction.

Exemple 3.2: Nombres irrationnels

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ou encore π sont des nombres irrationnels : ils ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une fraction.

Remarque : Écriture décimale d'un irrationnel

Il n'est pas possible d'écrire un nombre irrationnel sous forme décimale exacte. Les décimales qui le constituent sont en nombre infini et se suivent sans suite logique.

3.2 Nombres réels

Définition 3.3: Nombre réel

Un **nombre réel** est un nombre rationnel ou irrationnel.
L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Exemple 3.4: Appartenance à $\mathbb{R}$

2 , -5 , $0,67$, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{3}$ ou π appartiennent à $\mathbb{R}$.

Remarque : À propos de $\mathbb{R}$

- Un nombre est réel s'il est l'abscisse d'un point d'une droite graduée appelée la **droite numérique**.
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble de tous les nombres que nous utilisons en classe de seconde.

Démonstration : irrationalité de $\sqrt{2}$. On effectue une démonstration par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel.

Supposons donc que $\sqrt{2}$ est un rationnel. Il s'écrit alors $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels premiers entre eux, b non nul.

Ainsi : $\frac{a^2}{b^2} = 2$, soit $a^2 = 2b^2$.

On en déduit que a^2 est pair, ce qui entraîne que a est pair (si a était impair, alors a^2 serait impair).

Puisque a est pair, il existe un entier naturel k tel que $a = 2k$. Comme $a^2 = 2b^2$, on a :

$$(2k)^2 = 2b^2 \quad \text{soit} \quad 4k^2 = 2b^2 \quad \text{soit encore} \quad b^2 = 2k^2.$$

On en déduit que b^2 est pair, ce qui entraîne que b est pair.

Or, a et b sont premiers entre eux, donc ils ne peuvent être pairs simultanément : on aboutit à une absurdité.

Donc $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel, et donc $\sqrt{2}$ est un irrationnel. □

« Les nombres entiers permettent de compter, les nombres réels permettent de mesurer. »

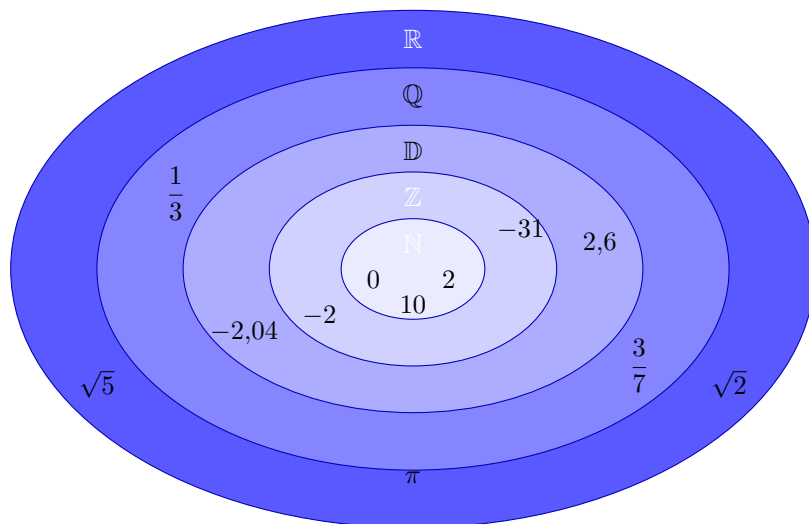
4 Classification des nombres

Propriété 4.1: Inclusions successives

Si un nombre appartient à $\mathbb{N}$, alors il appartient à $\mathbb{Z}$. Par exemple : $5 \in \mathbb{N}$ donc $5 \in \mathbb{Z}$. On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est **inclus** dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, et on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

On a de même la chaîne d'inclusions suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$



Méthode 4.2: Reconnaître la nature d'un nombre

Pour déterminer le **plus petit** ensemble auquel appartient un nombre, on calcule sa valeur si nécessaire, puis on teste successivement l'appartenance à $\mathbb{N}$, puis $\mathbb{Z}$, puis $\mathbb{D}$, puis $\mathbb{Q}$, puis $\mathbb{R}$ – dans cet ordre, puisque $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exemple 4.3: Application : reconnaître la nature d'un nombre

Quel est le plus petit ensemble de nombres auquel appartient chacun des nombres suivants ?

$$1) -\frac{1}{4} \quad 2) \frac{2}{6} \quad 3) 1,333 \quad 4) \sqrt{36} \quad 5) \sqrt{6} \quad 6) \frac{-3(\sqrt{2})^2}{12}$$

- 1) $-\frac{1}{4} = -0,25$, donc $-\frac{1}{4} \in \mathbb{D}$ (nombre fini de décimales).
- 2) $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,3333\dots$, donc $\frac{2}{6} \in \mathbb{Q}$: cette fraction s'écrit uniquement sous forme d'une fraction, elle ne peut pas s'écrire sous forme décimale (nombre infini de décimales).
- 3) $1,333 \in \mathbb{D}$ (nombre fini de décimales).
- 4) $\sqrt{36} = 6$, donc $\sqrt{36} \in \mathbb{N}$ car 6 est un entier positif.
- 5) $\sqrt{6} \approx 2,4495\dots$, donc $\sqrt{6} \in \mathbb{R}$: c'est un nombre irrationnel.
- 6) $\frac{-3(\sqrt{2})^2}{12} = \frac{-3 \times 2}{12} = \frac{-6}{12} = -0,5$, donc $\frac{-3(\sqrt{2})^2}{12} \in \mathbb{D}$ (nombre fini de décimales).

Méthode 4.4: Donner un encadrement d'un nombre réel

À la calculatrice, on obtient une valeur approchée d'un nombre réel. Donner un **encadrement** à 10^{-n} d'un nombre, c'est donner un encadrement d'**amplitude** 10^{-n} : on tronque la valeur affichée après n chiffres après la virgule pour obtenir la borne inférieure, et on ajoute 10^{-n} pour obtenir la borne supérieure.

Exemple 4.5: Encadrer $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ à 10^{-3}

La calculatrice affiche les valeurs approchées suivantes :

$$\sqrt{2} \approx 1,414213562 \dots \qquad \sqrt{3} \approx 1,732050808 \dots$$

Donner un encadrement à 10^{-3} , c'est donner un encadrement d'amplitude 0,001. On obtient :

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415 \qquad 1,732 < \sqrt{3} < 1,733.$$