

Nombres réels

Chapitre : intervalles et valeur absolue

Mathématiques – Seconde

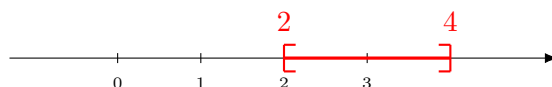
Table des matières

1	Intervalles de $\mathbb{R}$	1
1.1	Notations	1
1.2	Intervalle ouvert et intervalle fermé	1
1.3	Application aux inéquations	3
1.4	Intersections et réunions d'intervalles	3
2	Valeur absolue d'un réel	4

1 Intervalles de $\mathbb{R}$

1.1 Notations

L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $2 \leq x \leq 4$ peut se représenter sur une droite graduée.



Cet ensemble est appelé un **intervalle** et se note $[2; 4]$.

Exemple 1.1: Appartenance à un intervalle

L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $-2 \leq x \leq 7$ se note $[-2; 7]$.

On a par exemple :

$$4 \in [-2; 7]$$

$$-1 \in [-2; 7]$$

$$8 \notin [-2; 7]$$

1.2 Intervalle ouvert et intervalle fermé

Définition 1.2: Intervalle ouvert, intervalle fermé

On dit qu'un intervalle est **fermé** si ses extrémités appartiennent à l'intervalle.

On dit qu'il est **ouvert** dans le cas contraire.

Notation 1.3: Les symboles $+\infty$ et $-\infty$

Le symbole ∞ (« infini ») **n'est pas un nombre réel** : il indique qu'un intervalle n'est pas borné d'un côté.

— $+\infty$ signifie que x peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut ;

— $-\infty$ signifie que x peut prendre des valeurs aussi petites (aussi négatives) que l'on veut.

Un intervalle est toujours **ouvert** du côté de l'infini : $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres, ils ne peuvent donc jamais appartenir à l'intervalle. On écrit par exemple $[2; +\infty[$, et jamais $[2; +\infty]$.

Exemple 1.4: Intervalles ouverts et fermés

- L'intervalle $[-2; 5]$ est un intervalle **fermé**. On a : $-2 \in [-2; 5]$ et $5 \in [-2; 5]$.
- L'intervalle $]2; 6[$ est un intervalle **ouvert**. On a : $2 \notin]2; 6[$ et $6 \notin]2; 6[$.
- L'intervalle $]6; +\infty[$ est également un intervalle **ouvert**, car $+\infty$ n'est pas un nombre.

Nombres réels x	Notation	Représentation
$2 \leq x \leq 4$	$[2; 4]$	
$-1 < x \leq 3$	$] - 1; 3]$	
$0 \leq x < 2$	$[0; 2[$	
$2 < x < 4$	$]2; 4[$	
$x \geq 2$	$[2; +\infty[$	
$x > -1$	$] - 1; +\infty[$	
$x \leq 3$	$] - \infty; 3]$	
$x < 2$	$] - \infty; 2[$	

Remarque : L'ensemble $\mathbb{R}$ comme intervalle

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est un intervalle qui peut se noter $] - \infty; +\infty[$.

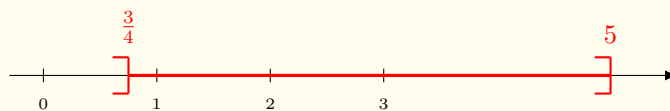
Méthode 1.5: Déterminer si un nombre appartient à un intervalle

On compare le nombre aux deux bornes de l'intervalle, en tenant compte du caractère ouvert ou fermé de chaque borne.

Exemple 1.6: Appartenance à l'intervalle $I =]\frac{3}{4}; 5]$

Déterminer si chacun des nombres suivants appartient à l'intervalle $I =]\frac{3}{4}; 5]$:

$$1; \quad \frac{3}{4}; \quad \frac{5}{8}; \quad \sqrt{10}$$



- $1 \in I$, car $\frac{3}{4} < 1 \leq 5$.
- $\frac{3}{4} \notin I$, car I est un intervalle ouvert à gauche : son extrémité gauche $\frac{3}{4}$ ne lui appartient pas.
- $\frac{5}{8} \notin I$, car $\frac{5}{8} = 0,625 < \frac{3}{4}$.
- $\sqrt{10} \in I$. En effet : $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$, soit $3 < \sqrt{10} < 4$, et $]3; 4[\subset I$.

1.3 Application aux inéquations

Une **inéquation** est une inégalité qui contient une inconnue x . Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient cette inégalité : il s'agit d'un ensemble de valeurs, que l'on décrit à l'aide d'un intervalle.

Les techniques de résolution des inéquations sont semblables à celles utilisées pour les équations.

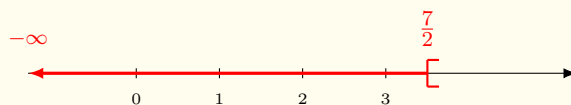
Méthode 1.7: Donner les solutions d'une inéquation

On isole l'inconnue x comme dans une équation (en changeant le sens de l'inégalité si l'on multiplie ou divise par un nombre négatif), puis on traduit le résultat sous forme d'un intervalle.

Exemple 1.8: Résoudre une inéquation

Résoudre l'inéquation et donner les solutions sous forme d'un intervalle : $2x - 3 < 4$.

$$\begin{aligned} 2x - 3 &< 4 \\ 2x &< 4 + 3 \\ 2x &< 7 \\ x &< \frac{7}{2} \end{aligned}$$

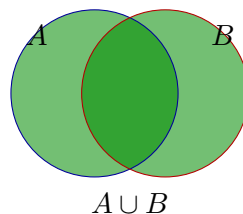
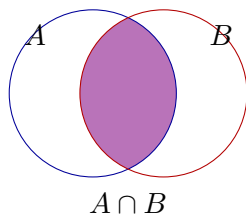


L'ensemble des solutions est l'intervalle $] -\infty ; \frac{7}{2}[$.

1.4 Intersections et réunions d'intervalles

Définition 1.9: Intersection, réunion

- L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B ; elle se note $A \cap B$.
- La **réunion** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B ; elle se note $A \cup B$.



Exemple 1.10: Intersection et réunion d'ensembles finis

Soit les ensembles $A = \{1 ; 2\}$ et $B = \{1 ; 3 ; 4\}$.
Alors $A \cap B = \{1\}$ et $A \cup B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

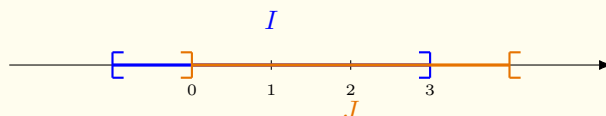
Méthode 1.11: Déterminer l'intersection et la réunion d'intervalles

On représente les deux intervalles sur un même axe gradué. L'intersection correspond à la zone où les deux intervalles se superposent ; la réunion correspond à la zone couverte par au moins l'un des deux intervalles.

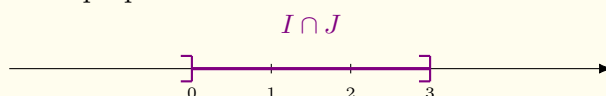
Exemple 1.12: Intersection et réunion de deux intervalles

Dans les cas suivants, déterminer l'intersection et la réunion des intervalles I et J .

a) $I = [-1 ; 3]$ et $J =]0 ; 4[$.

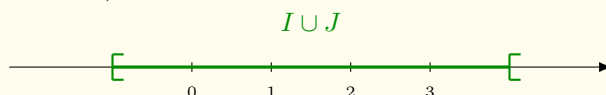


Les nombres de l'intersection sont ceux qui appartiennent à la fois à I et à J : c'est la zone où les deux intervalles se superposent.



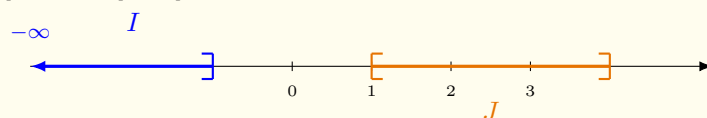
Ainsi $I \cap J =]0 ; 3]$.

Les nombres de la réunion sont ceux qui appartiennent à I ou à J (zone couverte par au moins un des deux intervalles).

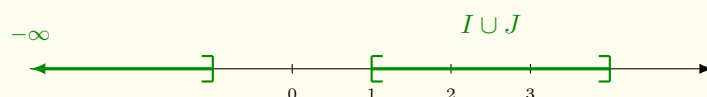


Ainsi $I \cup J = [-1 ; 4[$.

b) $I =]-\infty ; -1]$ et $J = [1 ; 4]$.



Ici, I et J n'ont pas de zone en commun : l'intersection des deux intervalles est **vide**. Un ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'**ensemble vide**, noté $\emptyset$. On a donc $I \cap J = \emptyset$.



La réunion, elle, ne peut pas se simplifier en un seul intervalle : $I \cup J =]-\infty ; -1] \cup [1 ; 4]$.

2 Valeur absolue d'un réel**Exemple 2.1: Calculer une valeur absolue**

- La valeur absolue de -5 est égale à 5 : on note $|-5| = 5$.
- La valeur absolue de 5 est égale à 5 : on note $|5| = 5$.
- $|11 - 13| = 2$
- $|13 - 11| = 2$

Remarque : Interprétation

La valeur absolue d'un nombre, c'est ce nombre **sans son signe**.

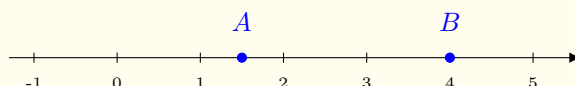
Propriété 2.2: Distance entre deux points

Soit A et B deux points d'abscisses respectives a et b sur une droite graduée.
La distance entre les points A et B est le nombre $|a - b|$.

Exemple 2.3: Calculer une distance

La distance entre les nombres 1,5 et 4 est :

$$|1,5 - 4| = |-2,5| = 2,5.$$

**Méthode 2.4: Résoudre une équation avec des valeurs absolues**

On interprète $|x - a| = r$ comme « la distance entre x et a est égale à r », ce qui donne deux solutions : $x = a - r$ ou $x = a + r$.

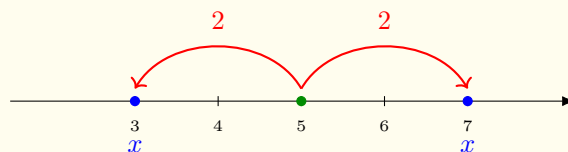
Exemple 2.5: Résoudre $|x - 5| = 2$

Résoudre l'équation suivante en s'aidant d'une droite graduée : $|x - 5| = 2$.

$$\underbrace{|x - 5|}_{\text{distance entre } x \text{ et } 5} = 2$$

distance entre x et 5

La distance entre x et 5 est donc égale à 2.



On en déduit que $x = 3$ ou $x = 7$.

Méthode 2.6: Résoudre une inéquation avec des valeurs absolues

On interprète $|x - a| \leq r$ comme « la distance entre x et a est inférieure ou égale à r », ce qui donne un intervalle de solutions : $x \in [a - r ; a + r]$.

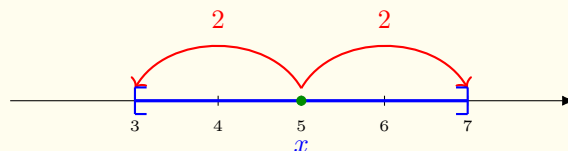
Exemple 2.7: Résoudre $|x - 5| \leq 2$

Résoudre l'inéquation suivante en s'aidant d'une droite graduée : $|x - 5| \leq 2$.

$$\underbrace{|x - 5|}_{\text{distance entre } x \text{ et } 5} \leq 2$$

distance entre x et 5

La distance entre x et 5 est donc inférieure ou égale à 2.



On en déduit que $x \in [3 ; 7]$.