

Racines carrées

Définition, propriétés et démonstrations

Mathématiques – Seconde

Table des matières

1	Définition	1
2	Propriétés sur les racines carrées	2
3	Extraire un carré parfait	2
4	Simplifier les écritures contenant des racines carrées	3
5	Racines carrées et développements	4

1 Définition

On observe que $3^2 = 9$, donc $\sqrt{9} = 3$; de même $2,6^2 = 6,76$, donc $\sqrt{6,76} = 2,6$.

Certains nombres, comme $\sqrt{2} \approx 1,4142$ ou $\sqrt{3} \approx 1,732$, s'écrivent avec un nombre infini de décimales : on les appelle des nombres **irrationnels**.

Définition 1.1: Racine carrée

La **racine carrée** d'un nombre positif a , notée $\sqrt{a}$, est le nombre **positif** dont le carré est égal à a .

Exemple 1.2: Racines de carrés parfaits

$$\begin{array}{lll} \sqrt{0} = 0 & \sqrt{25} = 5 & \sqrt{100} = 10 \\ \sqrt{1} = 1 & \sqrt{36} = 6 & \sqrt{121} = 11 \\ \sqrt{4} = 2 & \sqrt{49} = 7 & \sqrt{144} = 12 \\ \sqrt{9} = 3 & \sqrt{64} = 8 & \sqrt{169} = 13 \\ \sqrt{16} = 4 & \sqrt{81} = 9 & \end{array}$$

Remarque : La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas

Que vaut $\sqrt{-5}$? La racine carrée de -5 serait le nombre dont le carré vaut -5 .

Or, un nombre au carré est toujours **positif** (règle des signes) : il est donc impossible de trouver un nombre dont le carré vaille -5 .

Ainsi, $\sqrt{-5}$ **n'existe pas**. Plus généralement, la **racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas**.

2 Propriétés sur les racines carrées

Propriété 2.1: Propriétés des racines carrées

Pour tous nombres a et b **positifs** :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0) \qquad (\sqrt{a})^2 = a \qquad \sqrt{a^2} = a$$

Remarque : Racine carrée d'une somme ou d'une différence

Attention, de façon générale :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$$

Il n'existe **pas** de formule permettant de simplifier une somme ou une différence de racines carrées.

Démonstration : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

Soit a et b deux nombres positifs.

- $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b$
- $(\sqrt{a \times b})^2 = a \times b$, car $a \times b$ est positif.

Donc $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a \times b})^2$, et comme $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et $\sqrt{a \times b}$ sont tous deux positifs, on en déduit :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

Démonstration : $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

Soit a et b deux nombres strictement positifs. On a :

- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$
- $(\sqrt{a+b})^2 = a + b$

Donc $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$ car $2\sqrt{ab} > 0$.

Et donc, comme $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a+b}$ sont tous deux positifs :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$$

3 Extraire un carré parfait

Méthode 3.1: Extraire un carré parfait

Pour écrire $\sqrt{N}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et b le plus petit possible, on fait apparaître dans N le plus grand carré parfait qui le divise, on extrait sa racine à l'aide de la propriété $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$, puis on simplifie.

Pour que b soit le plus petit possible, b ne doit plus « contenir » de carré parfait.

Exemple 3.2: Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$

Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et b le plus petit possible : $A = \sqrt{72}$, $B = \sqrt{45}$, $C = 3\sqrt{125}$.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{72} \\ &= \sqrt{36 \times 2} && \text{(on fait apparaître le carré parfait 36 dans 72)} \\ &= \sqrt{36} \times \sqrt{2} && \text{(on extrait cette racine)} \\ &= 6\sqrt{2} && \text{(on simplifie)} \end{aligned}$$

$$B = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$C = 3\sqrt{125} = 3\sqrt{25 \times 5} = 3\sqrt{25} \times \sqrt{5} = 3 \times 5 \times \sqrt{5} = 15\sqrt{5}$$

4 Simplifier les écritures contenant des racines carrées**Méthode 4.1: Réduire une somme de racines carrées**

On regroupe les termes d'une même « famille de racines carrées » pour réduire l'expression (les différentes familles sont $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, ...).

Lorsque des racines carrées appartiennent à la même famille sans que cela soit apparent, on fait apparaître des carrés parfaits pour les « démasquer » (voir méthode précédente), avant de pouvoir réduire l'expression.

Exemple 4.2: Réduire une expression (familles déjà visibles)

Écrire le plus simplement possible :

$$\begin{aligned} A &= 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} & B &= 7\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - \sqrt{5} \\ C &= (3 - 2\sqrt{3}) - (4 - 6\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$A = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

$$B = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - \sqrt{5} = 15\sqrt{2} - 4\sqrt{5}$$

$$C = (3 - 2\sqrt{3}) - (4 - 6\sqrt{3}) = 3 - 2\sqrt{3} - 4 + 6\sqrt{3} = -1 + 4\sqrt{3}$$

Exemple 4.3: Réduire une expression (après extraction de carrés parfaits)

Écrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers et b le plus petit possible : $D = \sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27}$, $E = \sqrt{125} - 2\sqrt{20} + 6\sqrt{80}$.

$$\begin{aligned}
 D &= \sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27} && (\sqrt{12} \text{ et } \sqrt{27} \text{ sont des « } \sqrt{3} \text{ déguisées »}) \\
 &= \sqrt{4 \times 3} + 7\sqrt{3} - \sqrt{9 \times 3} && (\text{elles sont maintenant « démasquées »}) \\
 &= 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 3\sqrt{3} && (\text{on peut alors réduire l'expression}) \\
 &= 6\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E &= \sqrt{125} - 2\sqrt{20} + 6\sqrt{80} \\
 &= \sqrt{25 \times 5} - 2\sqrt{4 \times 5} + 6\sqrt{16 \times 5} \\
 &= 5\sqrt{5} - 2 \times 2\sqrt{5} + 6 \times 4\sqrt{5} \\
 &= 5\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 24\sqrt{5} \\
 &= 25\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

5 Racines carrées et développements

Méthode 5.1: Développer une expression contenant des racines carrées

On applique les règles usuelles de développement (distributivité simple, double distributivité, identités remarquables), en traitant les racines carrées comme des inconnues.

Exemple 5.2: Développer et réduire

Développer et réduire les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 A &= (\sqrt{3} - 4)^2 & B &= (3 + \sqrt{5})^2 \\
 C &= (\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5}) & D &= (3 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= (\sqrt{3} - 4)^2 && (\text{on applique la } 2^{\text{e}} \text{ identité remarquable}) \\
 &= (\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 4 + 4^2 \\
 &= 3 - 8\sqrt{3} + 16 \\
 &= 19 - 8\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= (3 + \sqrt{5})^2 && (\text{on applique la } 1^{\text{ère}} \text{ identité remarquable}) \\
 &= 3^2 + 2 \times 3 \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 \\
 &= 9 + 6\sqrt{5} + 5 \\
 &= 14 + 6\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (\sqrt{2} - \sqrt{5}) (\sqrt{2} + \sqrt{5}) && \text{(on applique la 3^e identité remarquable)} \\ &= (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2 \\ &= 2 - 5 \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= (3 + \sqrt{3}) (1 - \sqrt{2}) && \text{(on applique la double distributivité)} \\ &= 3 - 3\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{2} \\ &= 3 - 3\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6} \end{aligned}$$