

Ensembles de nombres

Feuille d'exercices

Mathématiques – Seconde

Sans calculatrice, sauf indication contraire. Les résultats fractionnaires doivent être donnés sous forme irréductible.

1 Appartenance à un ensemble de nombres

Exercice 1: Vrai ou faux ?

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

- a) $7 \in \mathbb{N}$
- b) $-3 \in \mathbb{N}$
- c) $0 \in \mathbb{Z}$
- d) $2,5 \in \mathbb{Z}$
- e) $-1,25 \in \mathbb{D}$
- f) $\frac{1}{7} \in \mathbb{D}$
- g) $\sqrt{9} \in \mathbb{N}$
- h) $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$

Correction de l'exercice 1

- a) **Vrai** : 7 est un entier positif, donc $7 \in \mathbb{N}$.
- b) **Faux** : -3 est négatif, donc $-3 \notin \mathbb{N}$ (on a en revanche $-3 \in \mathbb{Z}$).
- c) **Vrai** : 0 est un entier relatif, donc $0 \in \mathbb{Z}$.
- d) **Faux** : 2,5 n'est pas un entier, donc $2,5 \notin \mathbb{Z}$ (on a $2,5 \in \mathbb{D}$).
- e) **Vrai** : $-1,25$ s'écrit avec un nombre fini de chiffres après la virgule, donc $-1,25 \in \mathbb{D}$.
- f) **Faux** : $\frac{1}{7} \approx 0,142857142857\dots$ possède un nombre infini de décimales, donc $\frac{1}{7} \notin \mathbb{D}$ (on a $\frac{1}{7} \in \mathbb{Q}$).
- g) **Vrai** : $\sqrt{9} = 3$, qui est un entier positif, donc $\sqrt{9} \in \mathbb{N}$.
- h) **Faux** : $\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel, il ne peut pas s'écrire sous forme de fraction, donc $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ (on a $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$).

Exercice 2: Compléter un tableau d'appartenance

Compléter le tableau suivant en répondant par OUI ou par NON.

Appartient à	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-5					
$\frac{4}{3}$					
$\frac{3}{4}$					
$\sqrt{2}$					
$\frac{\sqrt{144}}{3}$					
π					

Correction de l'exercice 2

Appartient à	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-5	NON	OUI	OUI	OUI	OUI
$\frac{4}{3}$	NON	NON	NON	OUI	OUI
$\frac{3}{4}$	NON	NON	OUI	OUI	OUI
$\sqrt{2}$	NON	NON	NON	NON	OUI
$\frac{\sqrt{144}}{3}$	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI
π	NON	NON	NON	NON	OUI

Justification :

- -5 est un entier négatif : $-5 \notin \mathbb{N}$, mais $-5 \in \mathbb{Z}$ (donc aussi dans $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$).
- $\frac{4}{3} \approx 1,3333\dots$ a un nombre infini de décimales : elle n'appartient qu'à $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.
- $\frac{3}{4} = 0,75$ a un nombre fini de décimales : $\frac{3}{4} \in \mathbb{D}$.
- $\sqrt{2}$ est irrationnel : il n'appartient qu'à $\mathbb{R}$.
- $\frac{\sqrt{144}}{3} = \frac{12}{3} = 4$ est un entier naturel : il appartient à tous les ensembles.
- π est irrationnel : il n'appartient qu'à $\mathbb{R}$.

2 Reconnaître le plus petit ensemble

Exercice 3: Nature d'un nombre

Quel est le plus petit ensemble de nombres ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$) auquel appartient chacun des nombres suivants ?

1) $\frac{5}{2}$ 2) $\frac{-18}{6}$ 3) 2,75 4) $\sqrt{49}$ 5) $\sqrt{10}$ 6) $\frac{-4(\sqrt{3})^2}{6}$

Correction de l'exercice 3

Rappel : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Pour justifier qu'un ensemble est le plus petit contenant un nombre donné, il suffit de vérifier qu'il n'appartient pas à l'ensemble immédiatement plus petit dans cette chaîne.

- 1) $\frac{5}{2} = 2,5$, donc $\frac{5}{2} \in \mathbb{D}$ (nombre fini de décimales). De plus, ce n'est pas un nombre entier, donc $\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$: ainsi $\mathbb{D}$ est bien le plus petit ensemble auquel appartient $\frac{5}{2}$.

- 2) $\frac{-18}{6} = -3$, donc $\frac{-18}{6} \in \mathbb{Z}$ (-3 est un entier négatif). De plus, -3 est négatif, donc $-3 \notin \mathbb{N}$: ainsi $\mathbb{Z}$ est bien le plus petit ensemble auquel appartient $\frac{-18}{6}$.
- 3) $2,75 \in \mathbb{D}$ (nombre fini de décimales). De plus, $2,75$ n'est pas un nombre entier, donc $2,75 \notin \mathbb{Z}$: ainsi $\mathbb{D}$ est bien le plus petit ensemble auquel appartient $2,75$.
- 4) $\sqrt{49} = 7$, donc $\sqrt{49} \in \mathbb{N}$ car 7 est un entier positif. Comme $\mathbb{N}$ est le plus petit des ensembles usuels de nombres, aucun ensemble ne peut être plus petit : $\mathbb{N}$ est donc bien le plus petit ensemble auquel appartient $\sqrt{49}$.
- 5) $\sqrt{10} \approx 3,1622\dots$: 10 n'est pas un carré parfait, donc $\sqrt{10}$ est un nombre irrationnel (son écriture décimale est infinie et non périodique). Ainsi $\sqrt{10} \notin \mathbb{Q}$ (et donc $\sqrt{10} \notin \mathbb{D}$, $\sqrt{10} \notin \mathbb{Z}$, $\sqrt{10} \notin \mathbb{N}$) : $\mathbb{R}$ est donc bien le plus petit ensemble auquel appartient $\sqrt{10}$.
- 6) $\frac{-4(\sqrt{3})^2}{6} = \frac{-4 \times 3}{6} = \frac{-12}{6} = -2$, donc $\frac{-4(\sqrt{3})^2}{6} \in \mathbb{Z}$. De plus, -2 est négatif, donc $-2 \notin \mathbb{N}$: ainsi $\mathbb{Z}$ est bien le plus petit ensemble auquel appartient $\frac{-4(\sqrt{3})^2}{6}$.

3 Inclusions entre ensembles

Exercice 4: Compléter avec $\in$, $\notin$ ou $\subset$

Compléter chaque pointillé avec le symbole $\in$, $\notin$ ou $\subset$ qui convient.

- a) $3 \dots \mathbb{N}$
- b) $\mathbb{N} \dots \mathbb{Z}$
- c) $-5 \dots \mathbb{Z}$
- d) $\mathbb{D} \dots \mathbb{Q}$
- e) $\frac{1}{3} \dots \mathbb{D}$
- f) $\mathbb{Q} \dots \mathbb{R}$
- g) $\sqrt{2} \dots \mathbb{R}$
- h) $\mathbb{Z} \dots \mathbb{D}$

Correction de l'exercice 4

- a) $3 \in \mathbb{N}$
- b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- c) $-5 \in \mathbb{Z}$
- d) $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$
- e) $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ (car $\frac{1}{3} \approx 0,3333\dots$ a un nombre infini de décimales)
- f) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- g) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
- h) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$

4 Encadrements de nombres réels

Exercice 5: Encadrer des nombres irrationnels

À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement à 10^{-2} puis à 10^{-4} de $\sqrt{7}$ et de π .

Correction de l'exercice 5

La calculatrice affiche les valeurs approchées suivantes :

$$\sqrt{7} \approx 2,645751311 \dots \quad \pi \approx 3,141592653 \dots$$

Encadrement à 10^{-2} (amplitude 0,01) :

$$2,64 < \sqrt{7} < 2,65 \quad 3,14 < \pi < 3,15.$$

Encadrement à 10^{-4} (amplitude 0,0001) :

$$2,6457 < \sqrt{7} < 2,6458 \quad 3,1415 < \pi < 3,1416.$$