

Intervalles et valeur absolue

Feuille d'exercices

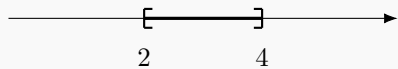
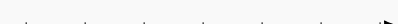
Mathématiques – Seconde

Sans calculatrice, sauf indication contraire. Chaque réponse doit être justifiée.

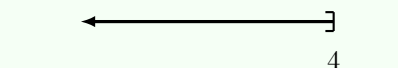
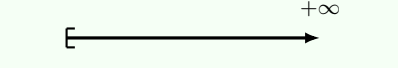
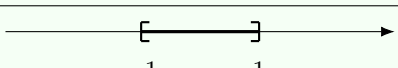
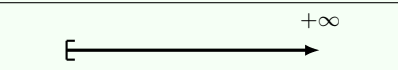
1 Écriture et représentation des intervalles

Exercice 1: Associer inégalité, intervalle et représentation

Recopier et compléter le tableau suivant comme dans l'exemple donné sur la première ligne. Pour les représentations graphiques, indiquer sur la droite graduée les crochets (ouverts ou fermés) correspondants.

Inégalité	Intervalle	Représentation graphique
$2 \leq x \leq 4$ (<i>exemple</i>)	$x \in [2; 4]$	
$0 < x \leq 5$		
	$x \in]-3; 7[$	
	$x \in]-\infty; 4]$	
$3 \leq x$		
	$x \in [-1; 1]$	
	$x \in [2; +\infty[$	

Correction de l'exercice 1

Inégalité	Intervalle	Représentation graphique
$2 \leq x \leq 4$	$[2; 4]$	
$0 < x \leq 5$	$]0; 5]$	
$-3 < x < 7$	$] -3; 7[$	
$x \leq 4$	$] -\infty; 4]$	
$3 \leq x$	$[3; +\infty[$	
$-1 \leq x \leq 1$	$[-1; 1]$	
$x \geq 2$	$[2; +\infty[$	

Pour la représentation graphique : un crochet **fermé** (tourné vers l'intérieur du segment) se place sur une borne appartenant à l'intervalle ; un crochet **ouvert** (tourné vers l'extérieur)

se place sur une borne n'appartenant pas à l'intervalle. Du côté de $+\infty$ ou $-\infty$, le crochet est toujours ouvert.

Exercice 2: Vrai ou faux ?

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

- a) L'intervalle $[-3; 5]$ est un intervalle fermé.
- b) $5 \in]-1; 5[$
- c) L'écriture $[3; +\infty]$ est correcte.
- d) $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
- e) L'intervalle $[2; 2]$ ne contient qu'un seul nombre.
- f) $\frac{22}{7} \in [3; 3,2]$
- g) $\pi \in]3,15; 3,2[$
- h) Tout nombre de l'intervalle $]2; +\infty[$ est supérieur ou égal à 3.

Correction de l'exercice 2

- a) **Vrai** : les deux extrémités -3 et 5 appartiennent à l'intervalle, il est donc fermé.
- b) **Faux** : l'intervalle $] - 1 ; 5[$ est ouvert en 5, donc $5 \notin] - 1 ; 5[$.
- c) **Faux** : $+\infty$ n'est pas un nombre réel, il ne peut donc jamais appartenir à un intervalle. Un intervalle est toujours ouvert du côté de l'infini : on écrit $[3; +\infty[$.
- d) **Vrai** : tout nombre réel appartient à $] - \infty ; +\infty[$, cet intervalle est donc bien l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier.
- e) **Vrai** : $[2; 2]$ est l'ensemble des réels x tels que $2 \leq x \leq 2$, c'est-à-dire l'ensemble $\{2\}$.
- f) **Vrai** : $3 \times 7 = 21 \leq 22$ donc $3 \leq \frac{22}{7}$; et $3,2 \times 7 = 22,4 \geq 22$ donc $\frac{22}{7} \leq 3,2$. Ainsi $\frac{22}{7} \in [3; 3,2]$.
- g) **Faux** : $\pi \approx 3,1415\dots$, or $3,1415 < 3,15$: donc $\pi \notin]3,15; 3,2[$.
- h) **Faux** : $2,5$ appartient à $]2; +\infty[$ (car $2,5 > 2$) alors que $2,5 < 3$. Un seul contre-exemple suffit à prouver qu'une affirmation est fausse.

2 Union et intersection d'intervalles

Exercice 3: Union et intersection d'intervalles

Compléter le tableau suivant : pour chaque ligne, déterminer $I \cup J$ et $I \cap J$, puis représenter I , J , $I \cup J$ et $I \cap J$ sur la droite graduée (une couleur différente pour chacun).

I	J	$I \cup J$	$I \cap J$	Représentation graphique
$] - 10 ; 2[$	$[-5 ; 3]$			
$] - \infty ; 2[$	$[0 ; 5[$			
$[3 ; +\infty[$	$] - \infty ; 6]$			
$] - \infty ; -2[$	$] - 4 ; -3]$			
$] - 4 ; 2]$	$[2 ; 5]$			
$] - 4 ; 2]$	$]2 ; 5]$			

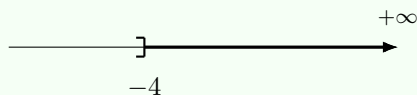
Correction de l'exercice 3

Code couleur utilisé sur les droites graduées : I en bleu, J en orange, $I \cup J$ en vert, $I \cap J$ en violet.

I	J	$I \cup J$	$I \cap J$	Représentation graphique
$] - 10 ; 2[$	$[-5 ; 3]$	$] - 10 ; 3]$	$[-5 ; 2[$	
$] - \infty ; 2]$	$[0 ; 5[$	$] - \infty ; 5[$	$[0 ; 2]$	
$[3 ; +\infty[$	$] - \infty ; 6]$	$\mathbb{R}$	$[3 ; 6]$	
$] - \infty ; -2[$	$] - 4 ; -3]$	$] - \infty ; -2[$	$] - 4 ; -3]$	
$] - 4 ; 2]$	$[2 ; 5]$	$] - 4 ; 5]$	$\{2\}$	
$] - 4 ; 2]$	$] 2 ; 5]$	$] - 4 ; 5]$	$\emptyset$	

Remarques.

- Ligne 3 : les deux intervalles se chevauchent et couvrent à eux deux tout $\mathbb{R}$, donc $I \cup J = \mathbb{R}$.
- Ligne 4 : $J =] - 4 ; -3]$ est entièrement contenu dans $I =] - \infty ; -2[$ (car tout réel de J est $\leq -3 < -2$) : ainsi $I \cap J = J$ et $I \cup J = I$.
- Lignes 5 et 6 : seule la nature (ouverte ou fermée) de la borne commune 2 change, ce qui suffit à faire passer l'intersection de $\{2\}$ (un seul point) à $\emptyset$ (aucun point commun), alors que la réunion $] - 4 ; 5]$ reste la même dans les deux cas.



$$3) \quad 5x + 2 > 2x - 7 \iff 5x - 2x > -7 - 2 \iff 3x > -9 \iff x > -3. \quad S =] - 3; +\infty[.$$

$$4) \quad \frac{x}{3} - 1 \geq \frac{1}{2} \iff \frac{x}{3} \geq \frac{3}{2} \iff x \geq \frac{9}{2}. \quad S = \left[\frac{9}{2}; +\infty \right[.$$

$$5) \quad 4 - 3x \geq 4x - 10 \iff 4 + 10 \geq 4x + 3x \iff 14 \geq 7x \iff 2 \geq x, \text{ c'est-à-dire } x \leq 2. \\ S =] - \infty; 2].$$

$$6) \quad 2(x - 1) < 3(x + 2) \iff 2x - 2 < 3x + 6 \iff -8 < x, \text{ c'est-à-dire } x > -8. \\ S =] - 8; +\infty[.$$

Exercice 6: Un problème de facturation

Un artisan facture 45 euros de déplacement, puis 30 euros par heure de travail.

On note t la durée du travail, exprimée en heures.

- 1) Exprimer en fonction de t le montant total de la facture.
- 2) Un client ne veut pas dépenser plus de 200 euros. Traduire cette contrainte par une inéquation, puis la résoudre.
- 3) En tenant compte du fait qu'une durée est positive, donner sous forme d'intervalle l'ensemble des durées possibles. Convertir la durée maximale en heures et minutes.

Correction de l'exercice 6

1) Le montant de la facture, en euros, est $45 + 30t$.

2) La contrainte se traduit par l'inéquation :

$$45 + 30t \leq 200 \iff 30t \leq 155 \iff t \leq \frac{155}{30} = \frac{31}{6}.$$

3) Une durée est positive ou nulle, donc $t \geq 0$. En combinant les deux conditions :

$$t \in [0; +\infty[\cap]-\infty; \frac{31}{6}] = \left[0; \frac{31}{6}\right].$$

Comme $\frac{31}{6} = 5 + \frac{1}{6}$ et que $\frac{1}{6}$ d'heure vaut 10 minutes, la durée maximale de travail est de 5 h 10 min.

4 Valeur absolue

Exercice 7: Calculer des valeurs absolues

Donner la valeur exacte de chacun des nombres suivants.

a) $|-7|$

b) $|3,5|$

c) $|2 - 9|$

d) $|9 - 2|$

e) $|-4 + 4|$

f) $\left|-\frac{2}{3}\right|$

g) $|\sqrt{5} - 3|$

h) $|3 - \pi|$

Comparer ensuite $|-3 + 5|$ et $|-3| + |5|$. Que peut-on en conclure ?

Correction de l'exercice 7

La valeur absolue d'un nombre, c'est ce nombre **sans son signe** : elle est donc toujours positive ou nulle.

a) $|-7| = 7$

b) $|3,5| = 3,5$

c) $|2 - 9| = |-7| = 7$

d) $|9 - 2| = |7| = 7$

e) $|-4 + 4| = |0| = 0$

f) $\left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$

g) $5 < 9$ donc $\sqrt{5} < 3$: le nombre $\sqrt{5} - 3$ est négatif, d'où $|\sqrt{5} - 3| = 3 - \sqrt{5}$.

h) $\pi \approx 3,14 > 3$: le nombre $3 - \pi$ est négatif, d'où $|3 - \pi| = \pi - 3$.

Enfin : $|-3 + 5| = |2| = 2$ tandis que $|-3| + |5| = 3 + 5 = 8$. Ces deux nombres sont différents : **on ne peut pas « distribuer » la valeur absolue sur une somme**. C'est une erreur classique à éviter.