

Fiche de cours avec exemples

Les fractions

Mathématiques – Seconde

Définition 1.1: Fraction

Pour $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ (c'est-à-dire $b \neq 0$), la fraction $\frac{a}{b}$ désigne le quotient de a par b . Le nombre a est le **numérateur**, le nombre b est le **dénominateur**.

Propriété 1.2: Fractions égales – simplification

Pour tout $k \neq 0$: $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$.

On obtient la forme **irréductible** d'une fraction en divisant le numérateur et le dénominateur par leur PGCD (ou, plus simplement, par des facteurs communs successifs).

Exemple 1.3: Simplifier une fraction

On veut écrire $\frac{36}{48}$ sous forme irréductible.

Méthode 1 : divisions successives par un facteur commun évident.

— 36 et 48 sont tous les deux pairs : on peut diviser par 2.

$$\frac{36}{48} = \frac{36 \div 2}{48 \div 2} = \frac{18}{24}$$

— 18 et 24 sont encore tous les deux pairs : on redivise par 2.

$$\frac{18}{24} = \frac{18 \div 2}{24 \div 2} = \frac{9}{12}$$

— 9 et 12 sont tous les deux divisibles par 3.

$$\frac{9}{12} = \frac{9 \div 3}{12 \div 3} = \frac{3}{4}$$

— 3 et 4 n'ont plus aucun diviseur commun (autre que 1) : la fraction $\frac{3}{4}$ est irréductible.

On conclut : $\frac{36}{48} = \frac{3}{4}$.

Méthode 2 : diviser directement par le PGCD. On remarque que $\text{pgcd}(36, 48) = 12$, car $36 = 12 \times 3$ et $48 = 12 \times 4$. En divisant numérateur et dénominateur par 12 en une seule étape, on retrouve directement $\frac{36}{48} = \frac{3}{4}$.

Propriété 1.4: Comparer deux fractions

— Même dénominateur : $\frac{a}{c} < \frac{b}{c} \iff a < b$ (on compare les numérateurs).

— Dénominateurs différents : on réduit d'abord au même dénominateur, puis on compare les numérateurs.

Exemple 1.5: Comparer deux fractions

On veut comparer $\frac{5}{6}$ et $\frac{7}{9}$.

Étape 1. Les dénominateurs 6 et 9 sont différents : on ne peut pas comparer directement les numérateurs.

Étape 2. On cherche un dénominateur commun, c'est-à-dire un multiple commun à 6 et 9.

— Multiples de 6 : 6, 12, **18**, 24, ...

— Multiples de 9 : 9, **18**, 27, ...

Le plus petit multiple commun est 18.

Étape 3. On réécrit chaque fraction avec le dénominateur 18.

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 3}{6 \times 3} = \frac{15}{18} \qquad \frac{7}{9} = \frac{7 \times 2}{9 \times 2} = \frac{14}{18}$$

Étape 4. On compare les numérateurs, puisque les fractions ont maintenant le même dénominateur : $15 > 14$, donc $\frac{15}{18} > \frac{14}{18}$.

On conclut : $\frac{5}{6} > \frac{7}{9}$.

Propriété 1.6: Additionner, soustraire

— Même dénominateur : $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ et $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$.

— Dénominateurs différents : on réduit **d'abord** les fractions au même dénominateur, puis on applique la règle ci-dessus. Une méthode simple, qui fonctionne toujours : multiplier les deux dénominateurs entre eux pour obtenir un dénominateur commun (il faudra alors penser à simplifier le résultat final).

Exemple 1.7: Additionner deux fractions de dénominateurs différents

On veut calculer $\frac{7}{12} + \frac{5}{8}$.

Étape 1. Les dénominateurs 12 et 8 sont différents : on doit d'abord réduire les deux fractions au même dénominateur.

Étape 2. Une méthode qui fonctionne **toujours** : on multiplie les deux dénominateurs entre eux pour obtenir un dénominateur commun.

$$12 \times 8 = 96$$

Étape 3. On convertit chaque fraction en multipliant son numérateur et son dénominateur par l'**autre** dénominateur.

$$\frac{7}{12} = \frac{7 \times 8}{12 \times 8} = \frac{56}{96} \qquad \frac{5}{8} = \frac{5 \times 12}{8 \times 12} = \frac{60}{96}$$

Étape 4. Les deux fractions ont maintenant le même dénominateur : on additionne les numérateurs.

$$\frac{56}{96} + \frac{60}{96} = \frac{56 + 60}{96} = \frac{116}{96}$$

Étape 5. Cette méthode fonctionne toujours, mais elle ne donne pas forcément un résultat déjà irréductible : il faut donc systématiquement vérifier si l'on peut simplifier. Ici, 116 et 96 sont tous les deux divisibles par 4 :

$$\frac{116}{96} = \frac{116 \div 4}{96 \div 4} = \frac{29}{24}$$

Comme 29 est premier et ne divise pas 24, $\frac{29}{24}$ est bien irréductible.

On conclut : $\frac{7}{12} + \frac{5}{8} = \frac{29}{24}$.

Remarque : Autre méthode possible

On aurait aussi pu utiliser le **plus petit** dénominateur commun (ici 24, le PPCM de 12 et 8, au lieu de 96) : le calcul est un peu plus court et la simplification finale n'est alors pas nécessaire. La méthode du produit des dénominateurs a l'avantage de fonctionner **dans tous les cas**, sans avoir à chercher de PPCM.

Propriété 1.8: Multiplier, diviser

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \quad (c \neq 0)$$

Diviser par une fraction revient à multiplier par son **inverse**. On peut simplifier *avant* de multiplier.

Exemple 1.9: Multiplier et diviser des fractions

(a) **Multiplication.** On veut calculer $\frac{14}{15} \times \frac{25}{21}$.

Étape 1. Avant de multiplier, on simplifie « en croix » : on cherche un facteur commun entre un numérateur et un dénominateur, même s'ils ne sont pas dans la même fraction.

- 14 (numérateur) et 21 (dénominateur) ont un facteur commun 7 : $14 = 7 \times 2$ et $21 = 7 \times 3$.
- 25 (numérateur) et 15 (dénominateur) ont un facteur commun 5 : $25 = 5 \times 5$ et $15 = 5 \times 3$.

Étape 2. Après simplification, l'expression devient :

$$\frac{14}{15} \times \frac{25}{21} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{3}$$

Étape 3. On multiplie les numérateurs entre eux, puis les dénominateurs entre eux :

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 3} = \frac{10}{9}$$

Comme 10 et 9 n'ont pas de diviseur commun, $\frac{10}{9}$ est irréductible.

On conclut : $\frac{14}{15} \times \frac{25}{21} = \frac{10}{9}$.

(b) **Division.** On veut calculer $\frac{3}{4} \div \frac{9}{10}$.

Étape 1. On remplace la division par une multiplication par l'inverse de $\frac{9}{10}$, c'est-à-dire $\frac{10}{9}$:

$$\frac{3}{4} \div \frac{9}{10} = \frac{3}{4} \times \frac{10}{9}$$

Étape 2. On simplifie avant de multiplier : 3 et 9 ont un facteur commun 3 ($3 = 3 \times 1$, $9 = 3 \times 3$) ; 10 et 4 ont un facteur commun 2 ($10 = 2 \times 5$, $4 = 2 \times 2$).

$$\frac{3}{4} \times \frac{10}{9} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3}$$

Étape 3. On multiplie :

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{1 \times 5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$$

On conclut : $\frac{3}{4} \div \frac{9}{10} = \frac{5}{6}$.

Remarque : Écritures décimales à connaître

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$
0,5	0,25	0,75	0,2	0,4	0,1	0,3	0,7

Remarque : Erreurs fréquentes à éviter

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq \frac{a+c}{b+d}$: on n'additionne **jamais** numérateurs et dénominateurs entre eux.
- On ne peut additionner ou soustraire des fractions que si elles ont le **même dénominateur**.
- Un résultat final doit toujours être donné sous forme **irréductible**.