

Fiche de cours détaillée

Les puissances

Mathématiques – Seconde

Définition 1.1: Puissance d'un nombre

Pour $a \in \mathbb{R}$ et n un entier naturel non nul, la puissance n -ième de a , notée a^n , est le produit de n facteurs égaux à a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}.$$

Le nombre a est appelé la **base**, le nombre n est appelé l'**exposant**. Par convention, pour $a \neq 0$: $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.

Propriété 1.2: Signe d'une puissance

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $a > 0$, alors $a^n > 0$, quel que soit n .
- Si $a < 0$:
 - si n est **pair**, alors $a^n > 0$;
 - si n est **impair**, alors $a^n < 0$.

Exemple 1.3: Déterminer le signe d'une puissance

On veut calculer $(-2)^4$ et $(-2)^5$.

Calcul de $(-2)^4$. L'exposant 4 est pair. On développe le produit de 4 facteurs égaux à -2 , en regroupant les facteurs deux par deux :

$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = [(-2) \times (-2)] \times [(-2) \times (-2)] = 4 \times 4 = 16.$$

Le résultat est bien positif, conformément à la règle (exposant pair).

Calcul de $(-2)^5$. L'exposant 5 est impair. On réutilise le calcul précédent :

$$(-2)^5 = (-2)^4 \times (-2) = 16 \times (-2) = -32.$$

Le résultat est bien négatif, conformément à la règle (exposant impair).

Propriété 1.4: Puissance d'exposant négatif

Pour $a \in \mathbb{R}^*$ (c'est-à-dire $a \neq 0$) et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Exemple 1.5: Calculer une puissance d'exposant négatif

On veut calculer 5^{-3} et $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$.

Calcul de 5^{-3} . Par définition, on prend l'inverse de 5^3 :

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{125}.$$

Calcul de $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$. Par définition, on prend l'inverse de $\left(\frac{2}{3}\right)^2$:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}.$$

On retrouve directement ce résultat en remarquant qu'élever une fraction à une puissance négative revient à **inverser la fraction**, puis à l'élever à la puissance positive correspondante :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Propriété 1.6: Produit de puissances de même base

Pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Exemple 1.7: Utiliser le produit de puissances de même base

Justification sur un cas simple. Pour comprendre pourquoi la règle fonctionne, développons $2^3 \times 2^4$:

$$2^3 \times 2^4 = \underbrace{(2 \times 2 \times 2)}_{3 \text{ facteurs}} \times \underbrace{(2 \times 2 \times 2 \times 2)}_{4 \text{ facteurs}} = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{7 \text{ facteurs}} = 2^7.$$

On retrouve bien $2^7 = 2^{3+4}$: les exposants s'additionnent.

Application avec un exposant négatif. On veut calculer $2^3 \times 2^{-5}$.

Étape 1. On additionne les exposants : $3 + (-5) = -2$.

Étape 2. On obtient :

$$2^3 \times 2^{-5} = 2^{-2}.$$

Étape 3. On applique la définition d'un exposant négatif :

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

On conclut : $2^3 \times 2^{-5} = \frac{1}{4}$.

Propriété 1.8: Quotient de puissances de même base

Pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

Exemple 1.9: Utiliser le quotient de puissances de même base

Justification sur un cas simple. Développons $5^5 \div 5^2$:

$$5^5 \div 5^2 = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5} = 5 \times 5 \times 5 = 5^3,$$

car deux des cinq facteurs du numérateur se simplifient avec les deux facteurs du dénominateur. On retrouve bien $5^3 = 5^{5-2}$: les exposants se soustraient.

Application avec des exposants négatifs. On veut calculer $10^{-2} \div 10^3$.

Étape 1. On soustrait les exposants : $-2 - 3 = -5$.

Étape 2. On obtient :

$$10^{-2} \div 10^3 = 10^{-5}.$$

Étape 3. On applique la définition d'un exposant négatif :

$$10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100\,000} = 0,00001.$$

On conclut : $10^{-2} \div 10^3 = 0,00001$.

Propriété 1.10: Puissance d'une puissance

Pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$(a^m)^n = a^{m \times n}.$$

Exemple 1.11: Utiliser la puissance d'une puissance

Justification sur un cas simple. Développons $(2^3)^2$: c'est le produit de **deux** facteurs égaux à 2^3 .

$$(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3 = 2^{3+3} = 2^6,$$

en utilisant la règle du produit de puissances de même base. On retrouve bien $2^6 = 2^{3 \times 2}$: les exposants se multiplient.

Application avec un exposant négatif. On veut calculer $(3^{-2})^3$.

Étape 1. On multiplie les exposants : $-2 \times 3 = -6$.

Étape 2. On obtient :

$$(3^{-2})^3 = 3^{-6}.$$

Étape 3. On applique la définition d'un exposant négatif :

$$3^{-6} = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}.$$

On conclut : $(3^{-2})^3 = \frac{1}{729}$.

Propriété 1.12: Puissance d'un produit, d'un quotient

Pour $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Exemple 1.13: Utiliser la puissance d'un produit et d'un quotient

Puissance d'un produit. On veut calculer $(2 \times 5)^4$, de deux façons différentes.

Calcul direct :

$$(2 \times 5)^4 = 10^4 = 10\,000.$$

Calcul en utilisant la règle :

$$(2 \times 5)^4 = 2^4 \times 5^4 = 16 \times 625 = 10\,000.$$

Les deux méthodes donnent bien le même résultat.

Puissance d'un quotient. On veut calculer $\left(\frac{3}{4}\right)^3$.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{3 \times 3 \times 3}{4 \times 4 \times 4} = \frac{27}{64}.$$

Remarque : Puissances de 10

Les puissances de 10 permettent de décaler la virgule dans l'écriture décimale d'un nombre : c'est ce qui rend l'**écriture scientifique** pratique.

10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4
0,001	0,01	0,1	1	10	100	1 000	10 000

Un exposant positif décale la virgule vers la droite, un exposant négatif la décale vers la gauche.

Remarque : Erreurs fréquentes à éviter

- $a^m \times a^n \neq a^{m \times n}$: dans un **produit** de puissances de même base, les exposants s'**additionnent**, ils ne se multiplient pas (cette dernière règle concerne la puissance d'une puissance, $(a^m)^n$).
- $(a + b)^n \neq a^n + b^n$ en général : une puissance ne se distribue **pas** sur une somme (sauf cas particulier $n = 1$).
- $a^{-n} \neq -a^n$: un exposant négatif signifie « prendre l'inverse », ce n'est pas un signe négatif devant le résultat.
- $(-a)^n \neq -a^n$ en général : attention aux parenthèses ! Par exemple $(-2)^2 = 4$, alors que $-2^2 = -(2^2) = -4$.