

Les vecteurs du plan

Chapitre 02 : les vecteurs, première partie

Mathématiques – Seconde

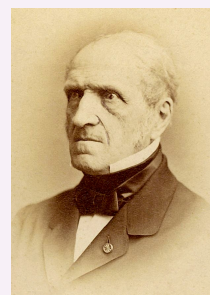
Table des matières

1 Définition et caractérisation géométrique	1
1.1 Translation et vecteur	1
1.2 Égalité de deux vecteurs	1
2 Opérations sur les vecteurs (registre géométrique)	3
2.1 Somme de deux vecteurs	3
2.2 Multiplication d'un vecteur par un réel	4

Remarque : Un peu d'histoire des mathématiques

Michel CHASLES (1793–1880) était un mathématicien français qui a laissé son nom pour ses grandes aptitudes en géométrie. La relation qui porte son nom permet d'additionner deux vecteurs.

Enseignant à l'École polytechnique et très riche par héritage, il a dilapidé une partie de sa fortune en achetant au faussaire Vrain-Lucas de très nombreux faux courriers entre personnages historiques (entre César et Cléopâtre par exemple, écrits en vieux français!), ce qui a sérieusement abîmé son image d'historien des mathématiques...



1 Définition et caractérisation géométrique

1.1 Translation et vecteur

Définition 1.1: Translation

Soient A et B deux points du plan. La **translation qui transforme A en B** fait glisser tous les points du plan :

- dans la même direction, celle de la droite (AB) ;
- dans le même sens, de A vers B ;
- d'une même longueur, la longueur AB .

Définition 1.2: Vecteur

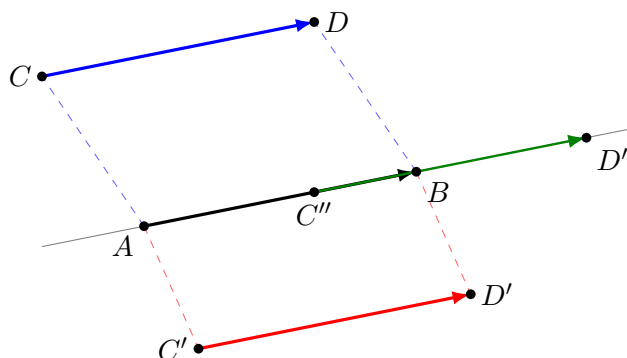
Pour caractériser cette translation, on dessine une flèche qui va de A jusqu'à B : on parle du **vecteur $\overrightarrow{AB}$** . La translation est alors appelée **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$** .

On dit que le point B est l'**image** du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1.2 Égalité de deux vecteurs

Soit D l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, et soit D' l'image de C' par cette même translation.

C'est la même translation qui transforme A en B , C en D et C' en D' . La translation qui transforme C en D est aussi notée $\overrightarrow{CD}$: ainsi on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C'D'}$.



Définition 1.3: Égalité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** lorsqu'ils ont :

- la même **norme** : la longueur AB , notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est égale à la longueur CD ;
- la même **direction** : la droite qui porte $\overrightarrow{AB}$ et la droite qui porte $\overrightarrow{CD}$ sont parallèles ;
- le même **sens** : de A vers B pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$, de C vers D pour le vecteur $\overrightarrow{CD}$.

Notation 1.4: Représentants d'un vecteur

Lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C'D'}$, ces flèches représentent un seul et même vecteur, que l'on peut noter avec une seule lettre, par exemple $\vec{u}$. On dit que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ sont des **représentants** du vecteur $\vec{u}$.

Pour un point M donné, il existe un unique représentant de $\vec{u}$ d'origine M : c'est $\overrightarrow{MM'}$, où M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$.

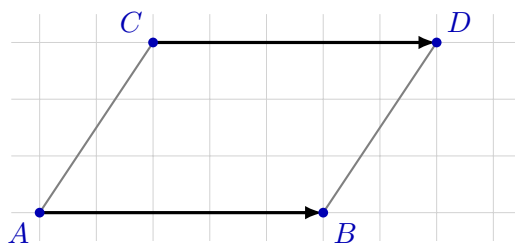
Définition 1.5: Vecteur nul, vecteur opposé

- Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ (translation qui ne déplace aucun point) est le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$. Pour tout point A , $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est l'**opposé** du vecteur $\overrightarrow{AB}$: il a la même direction et la même norme que $\overrightarrow{AB}$, mais il est de sens contraire. On note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Propriété 1.6: Caractérisation par le parallélogramme

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Attention à l'ordre des lettres : $ABDC$, et non $ABCD$.



Démonstration. **Démontrons d'abord que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $ABDC$ est un parallélogramme.**

Supposons $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, avec C non situé sur la droite (AB) .

- Les deux vecteurs ont la même norme, donc $AB = CD$.

- Ils ont la même direction, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
- Ils ont le même sens, donc les segments $[AD]$ et $[BC]$ se coupent : le quadrilatère $ABDC$ n'est pas croisé.

Or, si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme. Donc $ABDC$ est un parallélogramme.

Démontrons maintenant que si $ABDC$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Soit $ABDC$ un parallélogramme.

- Ses côtés opposés $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction.
- Ses côtés opposés ont la même longueur : $AB = CD$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même norme.
- D'après l'ordre des lettres ($A \rightarrow B$ puis $D \rightarrow C$ en parcourant le quadrilatère), $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens.

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction, le même sens et la même norme : ils sont égaux. $\square$

Remarque : Cas aplati

Si C appartient à la droite (AB) (points C'' et D'' de la première figure), le « parallélogramme » $ABD''C''$ est aplati : ses quatre sommets sont alignés.

Propriété 1.7: Caractérisation vectorielle du milieu

I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

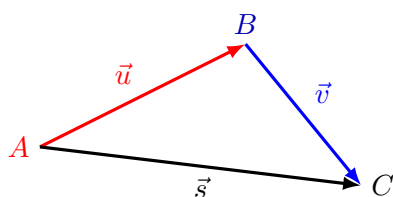
2 Opérations sur les vecteurs (registre géométrique)

2.1 Somme de deux vecteurs

Définition 2.1: Somme de deux vecteurs

On appelle **somme** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur $\vec{s}$ associé à la translation résultant de l'enchaînement des deux translations de vecteur $\vec{u}$ puis de vecteur $\vec{v}$.

On note $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$.



Propriété 2.2: Relation de Chasles

Si on enchaîne la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis celle de vecteur $\overrightarrow{BC}$, on s'est déplacé de A vers C . Donc, pour tous points A , B et C :

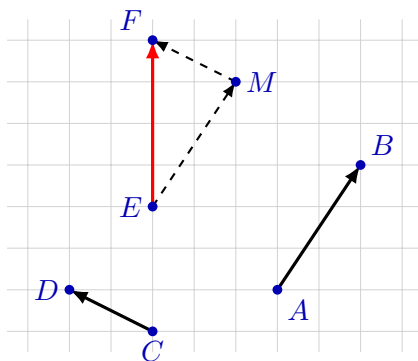
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

La lettre B « s'élimine ».

Méthode 2.3: Construire géométriquement une somme de vecteurs

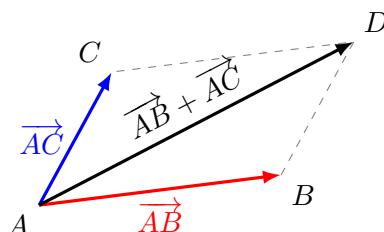
Construisons le point F tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

- On trace le vecteur partant de E qui est égal à $\overrightarrow{AB}$; on note M son extrémité.
- On trace le vecteur partant du point d'arrivée M qui est égal à $\overrightarrow{CD}$.
- Le point d'arrivée est le point F : en effet $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.



Propriété 2.4: Règle du parallélogramme

Pour tous points A , B et C : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D est le point tel que $ABDC$ est un parallélogramme.



Définition 2.5: Différence de deux vecteurs

Soustraire un vecteur, c'est ajouter son opposé : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.
Par exemple : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

2.2 Multiplication d'un vecteur par un réel

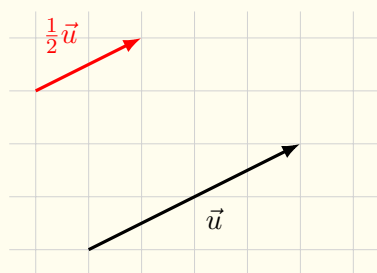
Définition 2.6: Produit d'un vecteur par un réel

Soit k un nombre réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur tel que :

- la **direction** de $k\vec{u}$ est la même que celle de $\vec{u}$ (les droites qui les portent sont parallèles) ;
- la **norme** de $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme de $\vec{u}$ par la distance à zéro de k : $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$;
- le **sens** de $k\vec{u}$ est le même que celui de $\vec{u}$ si $k > 0$; si $k < 0$, le sens de $k\vec{u}$ est opposé à celui de $\vec{u}$.

Par convention, si $k = 0$ ou si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$.

Exemple 2.7: Tracer le vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$



Le vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$ est le vecteur qui a la même direction que $\vec{u}$, le même sens que $\vec{u}$, et dont la norme est la moitié de celle de $\vec{u}$.

Ici, $\vec{u}$ correspond à un déplacement de 4 carreaux vers la droite et 2 vers le haut ; $\frac{1}{2}\vec{u}$ à un déplacement de 2 carreaux vers la droite et 1 vers le haut.

Remarque : Opposé

Pour tout vecteur $\vec{u}$, $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$: multiplier par -1 change seulement le sens.