

Les vecteurs du plan (première partie)

Feuille d'exercices

Mathématiques – Seconde

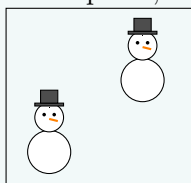
Les exercices suivent l'ordre de la séquence. Chaque réponse doit être justifiée.

1 Découvrir la notion de vecteur

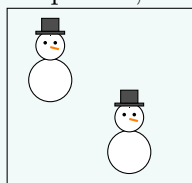
Activité : Découvrir la notion de vecteur

La notion de vecteur est centrale en mathématiques. Elle est utile dans de nombreuses situations. Dans un premier temps, on découvre les vecteurs du plan, que l'on peut représenter par une « flèche » synthétisant toutes les informations utiles.

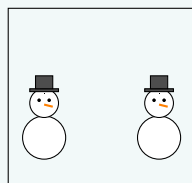
1. Translations. Dans chaque cadre, le bonhomme de neige le plus à gauche subit une translation. Proposer, dans chaque cas, un dessin de « flèche » qui représente la translation.



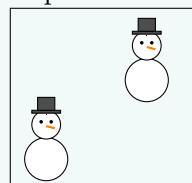
Translation n°1



Translation n°2



Translation n°3



Translation n°4

2. Déplacements. Un homme se trouve dans un désert. Sa position de départ est marquée par le point O . Représenter par une « flèche », dans chaque cas, son déplacement. Un kilomètre sera représenté par un centimètre. (Le nord est en haut de la page.)

Trajet n°1

800 m vers le Sud



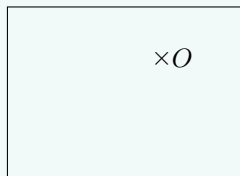
Trajet n°2

500 m vers l'Ouest



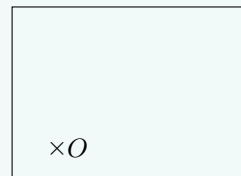
Trajet n°3

1 km en direction du Sud-Ouest

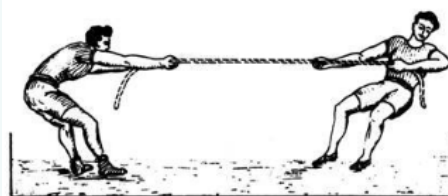


Trajet n°4

2 km en direction du Nord-Est

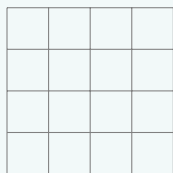
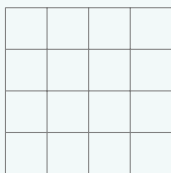
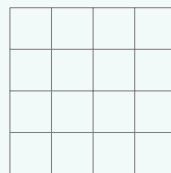
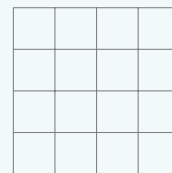


3. Forces. Deux athlètes tirent chacun une extrémité de la corde avec une égale intensité. Représenter par une « flèche » sur le dessin chacune des forces exercées par chaque athlète.



4. Coordonnées. Utiliser le quadrillage pour représenter, dans chaque cas, une « flèche » dont les coordonnées sont définies de la manière suivante :

- le nombre situé en haut des parenthèses donne le déplacement horizontal (en nombre de carreaux), vers la droite s'il est positif, vers la gauche s'il est négatif ;
- le nombre situé en bas des parenthèses donne le déplacement vertical (en nombre de carreaux), vers le haut s'il est positif, vers le bas s'il est négatif.

Coordonnées : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Coordonnées : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Coordonnées : $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Coordonnées : $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

5. Carte météo. Voici une carte météo. Selon vous, que symbolisent les « flèches » ?



.....
Quelles informations, en chaque point où elles sont représentées, fournissent ces « flèches » ?

-
-
-

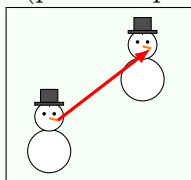
6. Étymologie. « Vecteur », étymologiquement, signifie « transport ». Qu'entend-on par « insecte vecteur d'une maladie » ?

7. Synthèse. Tous les exemples précédents (translations, déplacements, forces, coordonnées) ont mis en jeu des représentations variées de ce que l'on appelle un « vecteur » du plan. Comment définiriez-vous un vecteur ?

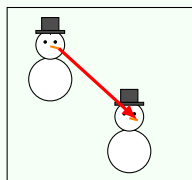
.....
.....
.....

Correction de l'activité

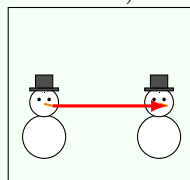
1. Dans chaque cadre, la flèche va d'un point du premier bonhomme au point *correspondant* du second (par exemple du bout du nez au bout du nez).



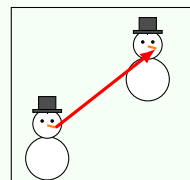
Translation n°1



Translation n°2



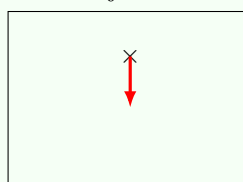
Translation n°3



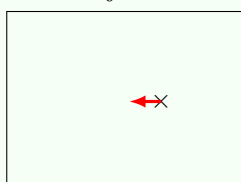
Translation n°4

2. Avec 1 km représenté par 1 cm :

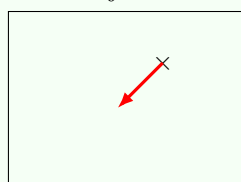
Trajet n°1



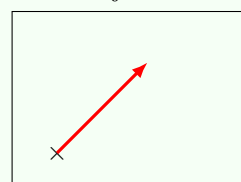
Trajet n°2



Trajet n°3



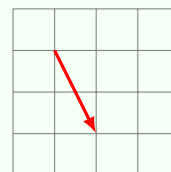
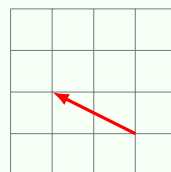
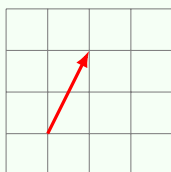
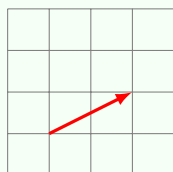
Trajet n°4



Longueurs des flèches : 0,8 cm, 0,5 cm, 1 cm et 2 cm.

3. Les deux flèches partent des mains des athlètes, sont portées par la corde, ont la même longueur (même intensité) et sont de sens contraires.

4.



5. Les flèches symbolisent le vent. En chaque point, elles indiquent la **direction** du vent, son **sens** (d'où il vient, où il va) et sa **force** (sa vitesse, représentée par la longueur ou la couleur de la flèche).

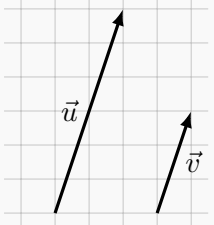
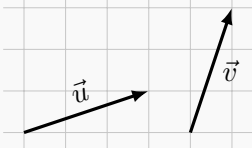
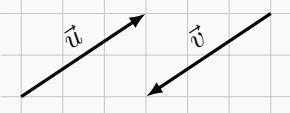
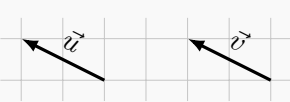
6. Un insecte vecteur d'une maladie est un insecte qui *transporte* l'agent de la maladie (virus, parasite) d'un individu à un autre, comme le moustique pour le paludisme.

7. Un vecteur est un objet caractérisé par une **direction**, un **sens** et une **longueur** (sa norme). On le représente par une flèche ; deux flèches qui ont même direction, même sens et même longueur représentent le même vecteur.

2 Égalité de vecteurs

Exercice 1: Égalité de vecteurs

Dans le tableau, indiquer pour chaque couple de vecteurs s'ils ont la même direction, la même norme et, éventuellement, le même sens. Préciser enfin dans quel(s) cas les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux.

	Même direction ? Même norme ?
	Même direction ? Même norme ? Même sens ?
	Même direction ? Même norme ? Même sens ?
	Même direction ? Même norme ? Même sens ?
	Même direction ? Même norme ? Même sens ?

Correction de l'exercice 1

On repère chaque vecteur par son déplacement en carreaux (horizontal, vertical).

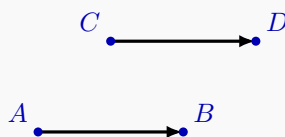
Ligne	Déplacements	Direction	Norme	Sens	Égaux ?
1	$\vec{u} : (3; 2), \vec{v} : (1; 3)$	non	non ($\sqrt{13} \neq \sqrt{10}$)	sans objet	non
2	$\vec{u} : (2; 6), \vec{v} : (1; 3)$	oui	non ($\vec{u}$ deux fois plus long)	oui	non
3	$\vec{u} : (3; 1), \vec{v} : (1; 3)$	non	oui ($\sqrt{10}$ pour les deux)	sans objet	non
4	$\vec{u} : (3; 2), \vec{v} : (-3; -2)$	oui	oui	non	non : $\vec{v} = -\vec{u}$
5	$\vec{u} : (-2; 1), \vec{v} : (-2; 1)$	oui	oui	oui	oui : $\vec{u} = \vec{v}$

Le sens n'a de signification que si les deux vecteurs ont la même direction. Les normes se comparent en comptant les carreaux ou, pour les vecteurs « en biais », avec le théorème de Pythagore (lignes 1 et 3).

3 Démonstration : égalité de vecteurs et parallélogramme

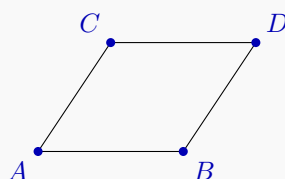
Exercice 2: Démonstration

- 1) Soient A, B, C et D quatre points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Démontrer que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

- 2) Soient A, B, C et D quatre points tels que $ABDC$ est un parallélogramme.



Démontrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Correction de l'exercice 2

- 1) Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$:

- les vecteurs ont la même norme, donc $AB = CD$;
- ils ont la même direction, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles ;
- ils ont le même sens, donc le quadrilatère $ABDC$ n'est pas croisé.

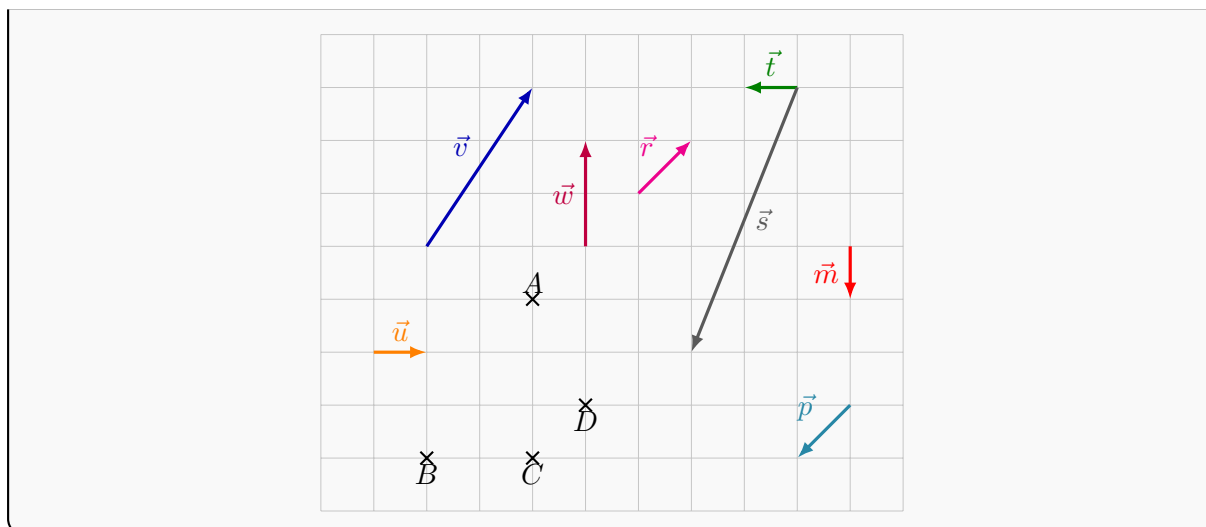
Or un quadrilatère non croisé qui a deux côtés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme. Donc $ABDC$ est un parallélogramme.

- 2) $ABDC$ est un parallélogramme, donc ses côtés opposés $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles et de même longueur : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction et la même norme. De plus, d'après l'ordre des lettres du parallélogramme, ils ont le même sens (de A vers B et de C vers D). Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

4 Vecteurs et translations

Exercice 3: Lire et utiliser des vecteurs sur un quadrillage

1. À partir de la figure, citer un vecteur :
 - a) opposé à $\overrightarrow{CD}$;
 - b) de même direction et de même sens que $\overrightarrow{AC}$;
 - c) de même direction que $\overrightarrow{BC}$ mais de sens contraire ;
 - d) égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$.
2. Placer les points E, F, G et H , images respectives du point A par les translations de vecteurs suivants : a) $\vec{w}$ b) $\vec{v}$ c) $\vec{p}$ d) $\vec{m}$.
3. Placer les points I, J, K et L , images respectives du point B par les translations de vecteurs suivants : a) $\vec{r}$ b) $\vec{u}$ c) $\vec{w}$ d) $\vec{m}$.

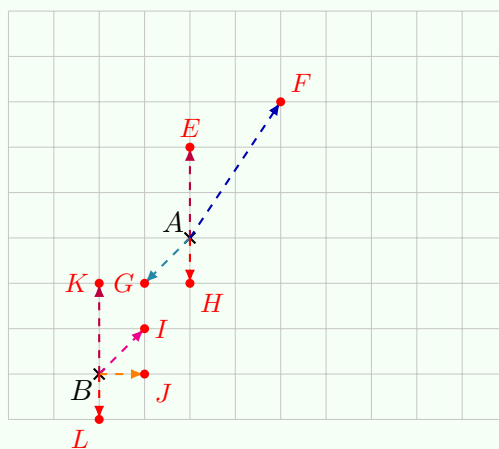


Correction de l'exercice 3

1.

- a) $\overrightarrow{CD}$ correspond à un déplacement d'un carreau vers la droite et d'un vers le haut ; son opposé (1 vers la gauche, 1 vers le bas) est $\vec{p}$.
- b) $\overrightarrow{AC}$ est vertical, dirigé vers le bas : $\vec{m}$ a même direction et même sens (mais pas la même norme).
- c) $\overrightarrow{BC}$ est horizontal, dirigé vers la droite : $\vec{t}$ est horizontal, dirigé vers la gauche.
- d) $\overrightarrow{BA}$ correspond à 2 carreaux vers la droite et 3 vers le haut : $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$.

2. et 3.

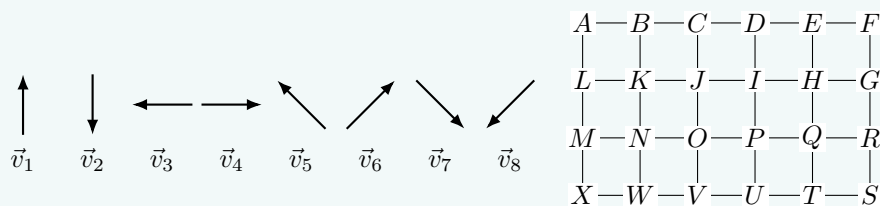


$$\overrightarrow{AE} = \vec{w}, \overrightarrow{AF} = \vec{v}, \overrightarrow{AG} = \vec{p}, \overrightarrow{AH} = \vec{m}; \quad \overrightarrow{BI} = \vec{r}, \overrightarrow{BJ} = \vec{u}, \overrightarrow{BK} = \vec{w}, \overrightarrow{BL} = \vec{m}.$$

5 Somme de vecteurs

Activité : Somme de vecteurs

On donne les vecteurs suivants (chaque flèche correspond à un pas du quadrillage, en horizontal, en vertical ou en diagonale) et le quadrillage de points ci-contre.



Compléter le tableau ci-dessous, qui se lit dans chaque colonne de haut en bas. La première colonne sert d'exemple ; elle donne la phrase : « L'image du point A par la translation de vecteur $\vec{v}_4$ est le point B . »

L'image du point...

A	N	D			P	K	Q			L
-----	-----	-----	--	--	-----	-----	-----	--	--	-----

... par la translation de vecteur...

$\vec{v}_4$	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}_4$			$\vec{v}_4 + \vec{v}_8$	$\vec{v}_4 + \vec{v}_3$	$\vec{v}_5 + \vec{v}_6 + \vec{v}_7$	$3\vec{v}_4 - \vec{v}_1$
-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	--	--	-------------------------	-------------------------	-------------------------------------	--------------------------

... est le point...

B			M	H	T	C		K	P	
-----	--	--	-----	-----	-----	-----	--	-----	-----	--

Correction de l'activité

A	N	D	N	I	P	K	Q	K	V	L
$\vec{v}_4$	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}_4$	$\vec{v}_7$	$\vec{v}_6$	$\vec{v}_4 + \vec{v}_8$	$\vec{v}_4 + \vec{v}_3$	$\vec{v}_5 + \vec{v}_6 + \vec{v}_7$	$3\vec{v}_4 - \vec{v}_1$
B	K	I	M	H	T	C	T	K	P	P

- $\vec{v}_4 + \vec{v}_8$: un pas vers la droite puis un pas en diagonale vers le bas à gauche, soit au total un pas vers le bas : $\vec{v}_4 + \vec{v}_8 = \vec{v}_2$.
- $\vec{v}_4 + \vec{v}_3 = \vec{0}$: on revient au point de départ. Le point K est sa propre image.
- $\vec{v}_5 + \vec{v}_6 + \vec{v}_7 = \vec{v}_6$: l'antécédent de P est le point V .
- $3\vec{v}_4 - \vec{v}_1$: trois pas vers la droite et un pas vers le bas : l'image de L est P .

Exercice 4: Petit récapitulatif

Voici des extraits de copies d'élèves récupérés par un professeur.

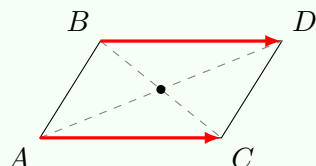
- L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AE}$ se note $\overleftarrow{AE}$.
- Si $ABCD$ est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $ABCD$ est un parallélogramme.
- Si $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ alors $[AB]$ et $[CD]$ ont le même milieu.

À l'aide d'un schéma, d'une définition ou d'un contre-exemple, relever et expliquer les erreurs en justifiant.

Correction de l'exercice 4

- La notation $\overleftarrow{AE}$ n'existe pas. L'opposé de $\overrightarrow{AE}$ est le vecteur $\overrightarrow{EA}$, que l'on note aussi $-\overrightarrow{AE}$.

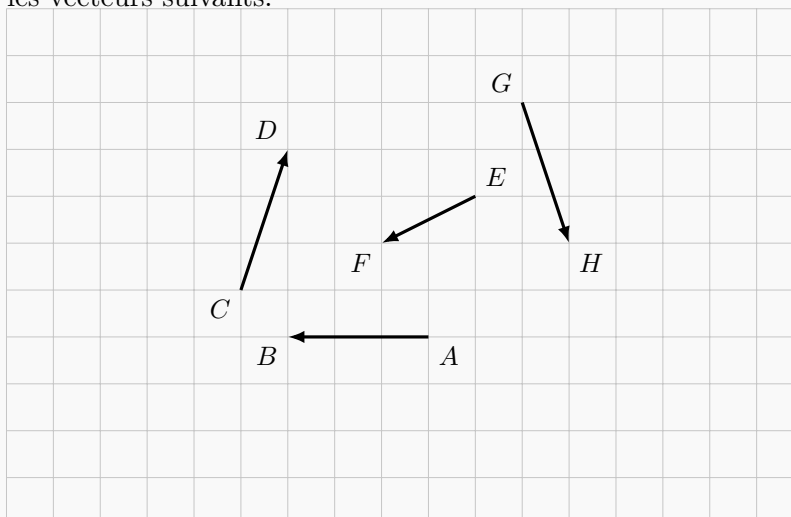
- $[AC]$ et $[BD]$ sont les **diagonales** du parallélogramme $ABCD$: elles ne sont en général pas parallèles, donc $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$ (contre-exemple : dans un carré $ABCD$, les diagonales sont perpendiculaires). Ce qui est vrai : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
- Attention à l'ordre des lettres : si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, c'est $ABDC$ qui est un parallélogramme. Le quadrilatère $ABCD$ est alors croisé.
- Si $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, alors $ACDB$ est un parallélogramme ; ses diagonales sont $[AD]$ et $[CB]$: ce sont **elles** qui ont le même milieu. Les segments $[AB]$ et $[CD]$ sont des côtés opposés du parallélogramme : ils n'ont pas le même milieu.



$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$: $ACDB$ est un parallélogramme, ses diagonales $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.

Exercice 5: Représenter des sommes de vecteurs

On considère les vecteurs suivants.



Construire les vecteurs suivants sur la figure.

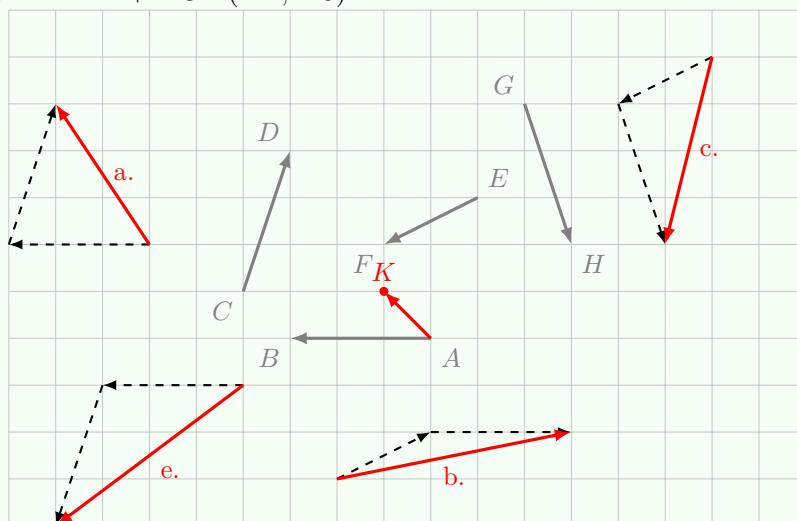
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH}$
- $\overrightarrow{AK}$ tel que $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

Correction de l'exercice 5

On note chaque vecteur par son déplacement en carreaux : $\overrightarrow{AB} : (-3; 0)$, $\overrightarrow{CD} : (1; 3)$, $\overrightarrow{FE} : (2; 1)$, $\overrightarrow{GH} : (1; -3)$. Chaque somme est construite « bout à bout » à partir d'une origine choisie (en pointillés : les vecteurs enchaînés ; en rouge : le résultat).

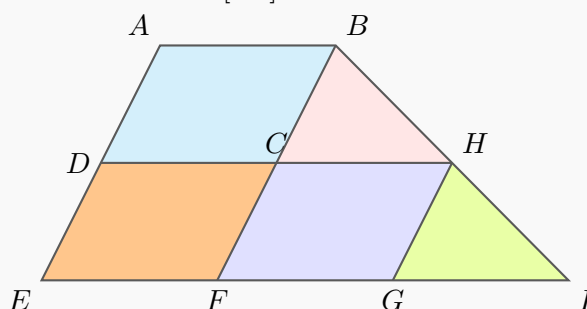
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} : (-2; 3)$;
- $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{BA} : (5; 1)$;
- $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} : (-1; -4)$;
- $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE} : (-1; 1)$: K est le point situé un carreau à gauche et un carreau au-dessus de A ;

e. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} : (-4; -3).$



Exercice 6: Simplifier des sommes de vecteurs

On considère la figure suivante, dans laquelle $ABCD$, $DCFE$ et $CHGF$ sont trois parallélogrammes superposables (on passe de l'un à l'autre par une translation), et où les points B, H, I sont alignés avec H milieu de $[BI]$.



Simplifier les sommes suivantes :

- 1) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HI}$
- 2) $\vec{b} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{ED}$
- 3) $\vec{c} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{AB}$
- 4) $\vec{d} = 3\overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{IH}$

Correction de l'exercice 6

On remplace les vecteurs par des vecteurs égaux bien choisis (côtés opposés des parallélogrammes), puis on applique la relation de Chasles.

- 1) $ABHC$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CH}$. Ainsi $\vec{a} = \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{CI}$ (on peut aussi écrire $\vec{a} = \overrightarrow{AH}$).
- 2) $DCFE$ est un parallélogramme, donc d'après la règle du parallélogramme $\vec{b} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC}$.
- 3) $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{BA}$ (même direction, même norme, sens contraire de $\overrightarrow{AB}$), donc $\vec{c} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.
- 4) $3\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EI}$ (car E, F, G, I sont régulièrement espacés) et $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{FD}$, donc $2\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{IB}$ (car $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{IH}$, H étant le milieu de $[BI]$). Ainsi $\vec{d} =$

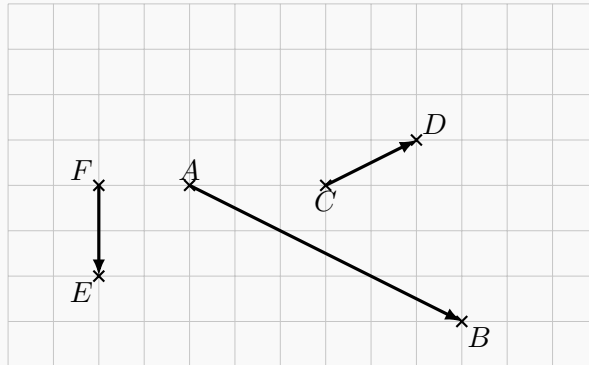
$$\vec{EI} + \vec{IB} = \vec{EB}.$$

6 Produit d'un vecteur par un réel

Exercice 7: Multiplication d'un vecteur par un nombre

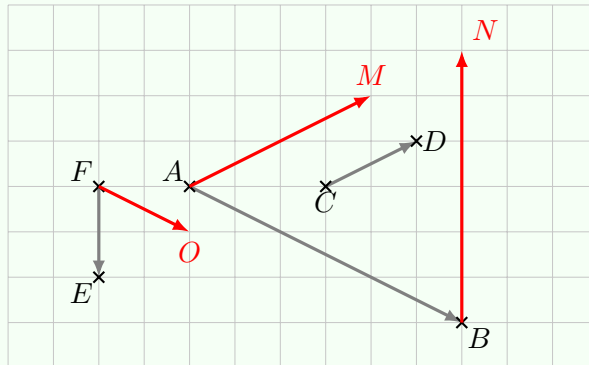
Tracer sur la figure les vecteurs suivants :

- 1) $\vec{AM} = 2\vec{CD}$
- 2) $\vec{BN} = -3\vec{FE}$
- 3) $\vec{FO} = \frac{1}{3}\vec{AB}$



Correction de l'exercice 7

$\vec{CD} : (2; 1)$, donc $\vec{AM} : (4; 2)$. $\vec{FE} : (0; -2)$, donc $\vec{BN} : (0; 6)$. $\vec{AB} : (6; -3)$, donc $\vec{FO} : (2; -1)$.



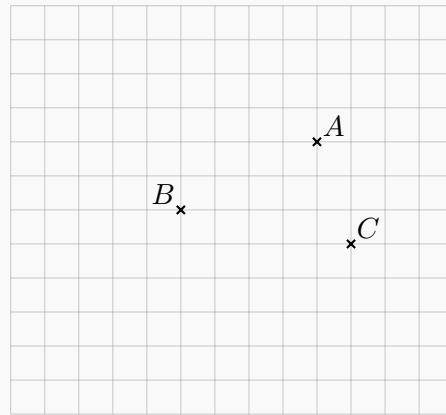
$\vec{AM}$ a le même sens que $\vec{CD}$ et une norme double ; $\vec{BN}$ est de sens contraire à $\vec{FE}$ et trois fois plus long ; $\vec{FO}$ a le même sens que $\vec{AB}$ et une norme trois fois plus petite.

7 Constructions et automatismes

Exercice 8: Construction sans coordonnées (automatismes)

ABC est un triangle. Représenter les points M , N et P tels que :

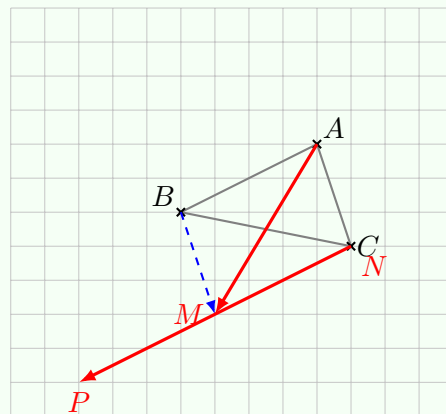
1. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$
3. $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{AB}$

**Indication**

Depuis A , tracer $\overrightarrow{AB}$, puis un représentant de $\overrightarrow{AC}$ ayant pour origine B .

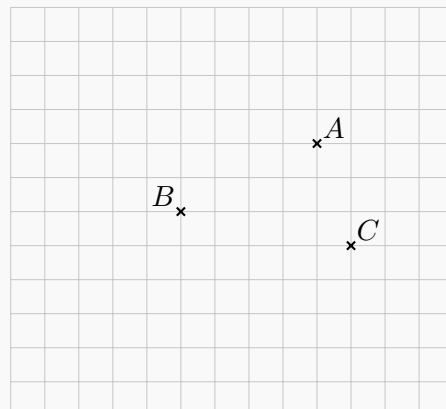
Correction de l'exercice 8

1. On enchaîne $\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{AC}$: M est le quatrième sommet du parallélogramme $ABMC$ (règle du parallélogramme).
2. $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ (relation de Chasles) : donc $N = C$.
3. $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{AB}$: depuis C , on reporte deux fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

**Exercice 9: Reconstruction sans coordonnées (automatismes)**

ABC est un triangle. Représenter les points E , I et F tels que :

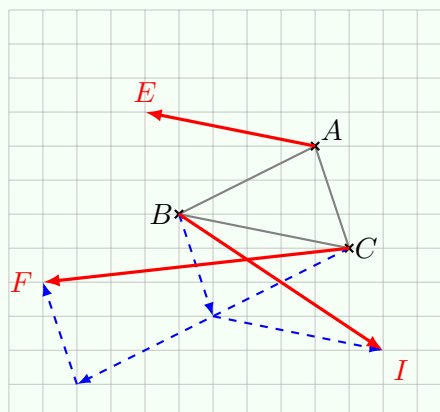
- $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}$
- $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$



Correction de l'exercice 9

On transforme chaque soustraction en addition de l'opposé.

- $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$: $ACBE$ est un parallélogramme.
- $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$: depuis B , on enchaîne $\overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{BC}$.
- $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$: depuis C , on enchaîne deux fois $\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{CA}$.

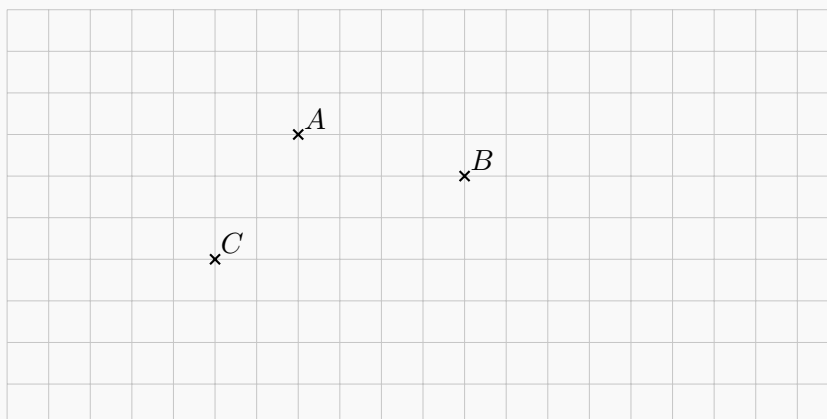


8 Révisions

Exercice 10: Construire des points

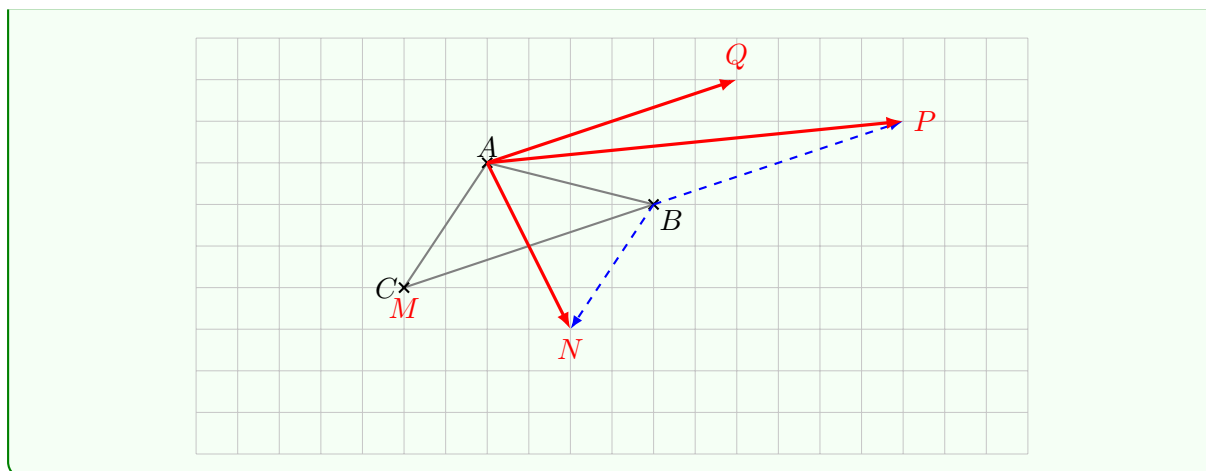
ABC est un triangle. Construire les points M , N , P et Q définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} \quad \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$



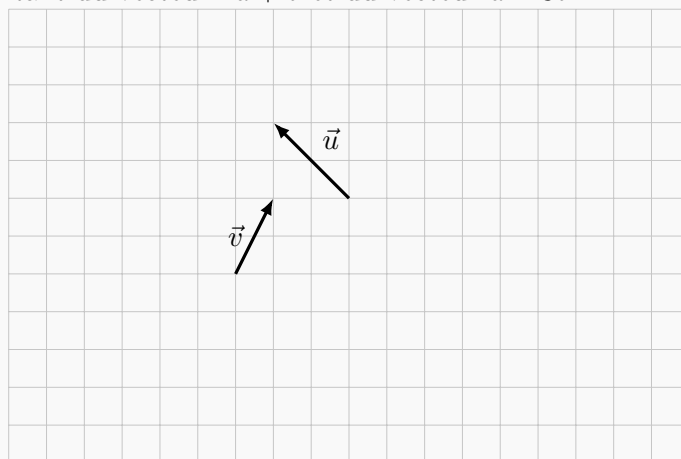
Correction de l'exercice 10

- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Chasles) : $M = C$.
- $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$: depuis B , on reporte $\overrightarrow{CB}$.
- $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$: $ABNC$ est un parallélogramme.
- $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$: $ACBQ$ est un parallélogramme.



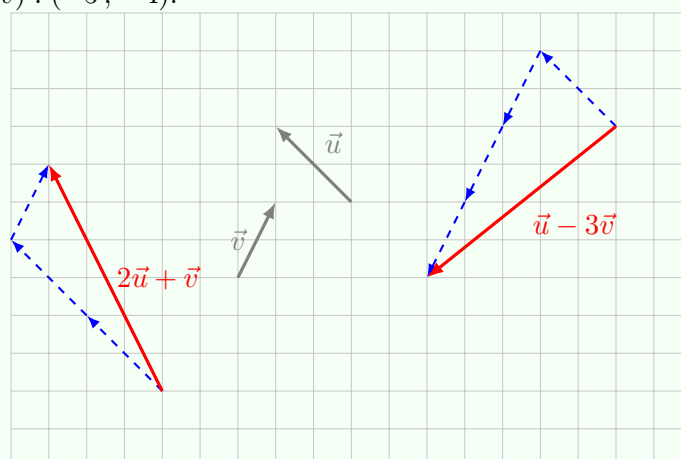
Exercice 11: Combinaisons de vecteurs

Tracer un représentant du vecteur $2\vec{u} + \vec{v}$ et du vecteur $\vec{u} - 3\vec{v}$.



Correction de l'exercice 11

$\vec{u} : (-2; 2)$ et $\vec{v} : (1; 2)$. On enchaîne les vecteurs bout à bout : $2\vec{u} + \vec{v} : (-3; 6)$ et $\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{u} + 3(-\vec{v}) : (-5; -4)$.



Exercice 12: Simplifier

Simplifier au maximum l'écriture des vecteurs suivants.

$$\vec{u} = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{UH} \qquad \vec{v} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AB}$$

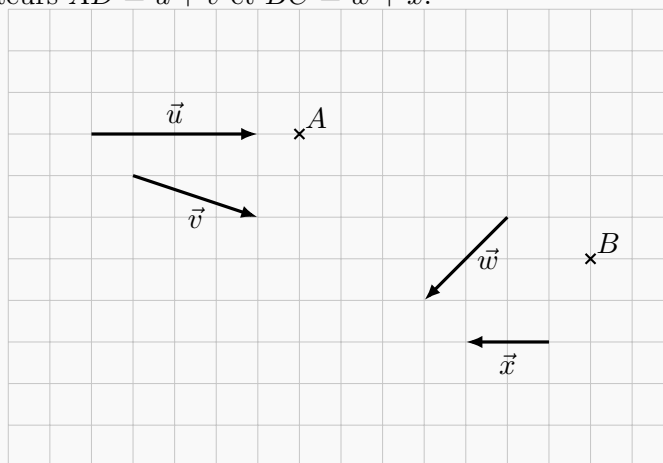
Correction de l'exercice 12

On réordonne les termes pour pouvoir appliquer la relation de Chasles.

$$\vec{u} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{UH} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{RF} \qquad \vec{v} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC}$$

Exercice 13: Construire des sommes

Construire les vecteurs $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{w} + \vec{x}$.

**Correction de l'exercice 13**