Équations du premier degré et identités remarquables

Chapitre 04 : équations du premier degré et identités remarquables

Mathématiques – Seconde

Table des matières

1 Résolution d'équations du premier degré **1**

2 Développer et factoriser **2**
2.1 Vocabulaire et distributivité 2
2.2 Identités remarquables 3
2.3 Factoriser 4

3 Résoudre une équation en factorisant **5**

1 Résolution d'équations du premier degré

Définition 1.1: Équation, solution

Une **équation** d'inconnue x est une égalité entre deux expressions (les deux **membres**) dans lesquelles figure x.
Une **solution** de l'équation est une valeur de x pour laquelle l'égalité est vraie. **Résoudre** l'équation, c'est trouver toutes ses solutions.

Définition 1.2: Équation du premier degré

Une **équation du premier degré** est une équation dont, dans chaque membre, la plus haute puissance de x est 1 lorsque chaque membre est écrit sous forme développée.

Exemple 1.3: Reconnaître une équation du premier degré

- $2x + 3 = 8x - 5$ est une équation du premier degré : dans chaque membre, la plus haute puissance de x est 1.
- $2x^2 - 2 = 3x - 1$ n'est pas une équation du premier degré : dans le membre de gauche, la plus haute puissance de x est 2.

Propriété 1.4: Règles de transformation d'une égalité

On obtient une équation qui a les mêmes solutions :
- en **ajoutant** ou en **soustrayant** un même nombre (ou une même expression) aux deux membres ;
- en **multipliant** ou en **divisant** les deux membres par un même nombre **non nul**.

Méthode 1.5: Résoudre une équation du premier degré

Résolvons par exemple l'équation $3x - 7 = -4x + 2$.

1re étape : on regroupe les termes en x dans un membre et les nombres dans l'autre.

$$\begin{aligned} 3x-7 &= -4x+2 \\ 3x-7+4x &= -4x+2+4x \\ 7x-7 &= 2 \\ 7x-7+7 &= 2+7 \\ 7x &= 9 \end{aligned}$$

2e étape : on divise chaque membre par le coefficient de x.

$$\begin{aligned} 7x &= 9 \\ \frac{7x}{7} &= \frac{9}{7} \\ x &= \frac{9}{7} \end{aligned}$$

L'équation a une unique solution : $\frac{9}{7}$.

Remarque : Parenthèses et fractions

- S'il y a des parenthèses, on **développe** d'abord chaque membre. Exemple : $4(x-1) = 6x+4 \iff 4x-4 = 6x+4$.
- S'il y a des fractions, on peut multiplier les deux membres par un dénominateur commun pour s'en débarrasser. Exemple : $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} = 3 \iff 2x + x = 36$ (on a multiplié par 12).

Méthode 1.6: Résoudre un problème par une mise en équation

1. **Choisir l'inconnue** : on note x la grandeur cherchée, en précisant son unité.
2. **Traduire l'énoncé** par une équation d'inconnue x.
3. **Résoudre** l'équation.
4. **Vérifier** que la solution convient (dans l'équation et dans le contexte) et **conclure** par une phrase répondant à la question.

Exemple. Le périmètre d'un triangle isocèle est 35 mm et sa base mesure 7 mm de moins que chacun des côtés isocèles. On note x la longueur d'un côté isocèle, en mm. La base mesure $x-7$, donc :

$$x + x + (x-7) = 35 \iff 3x = 42 \iff x = 14.$$

Vérification : $14+14+7 = 35$. Les côtés isocèles mesurent 14 mm et la base 7 mm.

2 Développer et factoriser

2.1 Vocabulaire et distributivité

Définition 2.1: Développer, factoriser

- **Développer** une expression, c'est transformer un **produit** en une **somme** (ou une différence).
- **Factoriser** une expression, c'est transformer une **somme** (ou une différence) en un **produit**.

$$\underbrace{2x(x-6)}_{\text{forme factorisée}} \overset{\text{développer}}{\underset{\text{factoriser}}{\rightleftarrows}} \underbrace{2x^2-12x}_{\text{forme développée}}$$

Propriété 2.2: Distributivité

Pour tous nombres réels a, b, c et d :
- **simple distributivité :** $a(b+c) = ab+ac$ et $a(b-c) = ab-ac$;
- **double distributivité :** $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$.

Méthode 2.3: Développer avec la distributivité

On multiplie **chaque terme** du premier facteur par **chaque terme** du second, en faisant attention aux signes, puis on **réduit** (on regroupe les termes en x^2, en x et les nombres).
- $x(5-2x) = x\times 5 - x\times 2x = 5x-2x^2$.
- $(4x-6)(x+5) = 4x\times x + 4x\times 5 - 6\times x - 6\times 5 = 4x^2+20x-6x-30 = 4x^2+14x-30$.

2.2 Identités remarquables

Propriété 2.4: Identités remarquables

Pour tous nombres réels a et b, les égalités suivantes sont toujours vraies.
- **Égalité 1 :** $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- **Égalité 2 :** $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
- **Égalité 3 :** $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

Démonstration. Soient a et b deux nombres réels. On utilise la double distributivité.

Égalité 1 :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a\times a + a\times b + b\times a + b\times b\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

Égalité 2 :

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a\times a - a\times b - b\times a + b\times b\\ &= a^2-2ab+b^2\end{aligned}$$

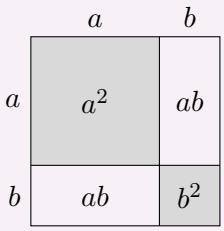
Égalité 3 :

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2-ab+ba-b^2\\ &= a^2-b^2\end{aligned}$$

□

Remarque : Interprétation géométrique

Lorsque a et b sont positifs, l'égalité 1 se lit sur un carré de côté $a+b$ découpé en un carré de côté a, un carré de côté b et deux rectangles de dimensions a et b (voir l'activité).



Méthode 2.5: Développer avec une identité remarquable

On repère la forme de l'expression, on identifie a et b, puis on applique la formule **en mettant des parenthèses** autour de a et de b.

— $(5x+2)^2$: forme $(a+b)^2$ avec $a=5x$ et $b=2$.
$(5x+2)^2 = (5x)^2 + 2\times 5x \times 2 + 2^2 = 25x^2 + 20x + 4$.

— $(9-4x)^2$: forme $(a-b)^2$ avec $a=9$ et $b=4x$.
$(9-4x)^2 = 9^2 - 2\times 9 \times 4x + (4x)^2 = 81 - 72x + 16x^2$.

— $(x+2)(x-2)$: forme $(a+b)(a-b)$ avec $a=x$ et $b=2$.
$(x+2)(x-2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$.

Erreur fréquente : $(x+10)^2 \neq x^2 + 100$. Il ne faut pas oublier le double produit : $(x+10)^2 = x^2 + 20x + 100$.

2.3 Factoriser

Méthode 2.6: Factoriser avec un facteur commun

On repère un **facteur commun** à tous les termes, puis on applique la distributivité « à l'envers » : $ka + kb = k(a+b)$.

— $3x^2 - 2x = x\times 3x - x \times 2 = x(3x-2)$.

— $6x^2 - 8x = 2x \times 3x - 2x \times 4 = 2x(3x-4)$.

— Le facteur commun peut être une expression entre parenthèses :
$(x+1)(2x-3) + (x+1)(x+5) = (x+1)\big[(2x-3) + (x+5)\big] = (x+1)(3x+2)$.

On vérifie toujours en redéveloppant le résultat.

Méthode 2.7: Factoriser avec une identité remarquable

Lorsqu'il n'y a pas de facteur commun, on cherche à reconnaître une identité remarquable « de droite à gauche ».

Trois termes : on ordonne l'expression, on cherche deux carrés a^2 et b^2, puis on **vérifie** que le troisième terme est bien le double produit $2ab$ (ou $-2ab$).

— $9x^2 + 12x + 4$: $9x^2 = (3x)^2$, $4 = 2^2$ et $2\times 3x \times 2 = 12x$. Donc $9x^2 + 12x + 4 = (3x+2)^2$.

— $x^2 + 169 - 26x = x^2 - 26x + 169$: $169 = 13^2$ et $2\times x \times 13 = 26x$. Donc $x^2 - 26x + 169 = (x-13)^2$.

— $x^2 + 4x + 1$: $1 = 1^2$ mais $2\times x \times 1 = 2x \neq 4x$. Ce n'est pas une identité remarquable.

Différence de deux carrés : on écrit chaque terme comme un carré, puis $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

— $x^2 - 121 = x^2 - 11^2 = (x-11)(x+11)$.

— $36 - 4x^2 = 6^2 - (2x)^2 = (6-2x)(6+2x)$.

— $(x-4)^2 - 36 = (x-4)^2 - 6^2 = \big((x-4)-6\big)\big((x-4)+6\big) = (x-10)(x+2)$.

3 Résoudre une équation en factorisant

Propriété 3.1: Équation produit nul

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul :

$$A \times B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

Exemple 3.2: Résoudre une équation produit nul

$(x-3)(9-x) = 0 \iff x-3 = 0$ ou $9-x = 0 \iff x = 3$ ou $x = 9$.
L'équation a deux solutions : 3 et 9.

Méthode 3.3: Résoudre une équation qui n'est pas du premier degré

Lorsqu'une équation contient des termes en x^2, on ne peut pas « isoler x ». On procède ainsi :

1. on rassemble tous les termes dans un membre pour obtenir une équation de la forme $\cdots = 0$;
2. on **factorise** le membre non nul (facteur commun ou identité remarquable) ;
3. on applique la règle du **produit nul**.

Exemple 1. Résolvons $x^2 = 5x$.

$$x^2 = 5x \iff x^2 - 5x = 0 \iff x(x-5) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x-5 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 5.$$

Exemple 2. Résolvons $2x^2 - 12x + 35 = 17$.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 12x + 35 = 17 &\iff 2x^2 - 12x + 18 = 0 \iff 2(x^2 - 6x + 9) = 0 \\ &\iff 2(x-3)^2 = 0 \iff x - 3 = 0 \iff x = 3. \end{aligned}$$

L'équation a une seule solution : 3.
Exemple 3. Résolvons $(x-4)^2 - 36 = 0$.

$$(x-4)^2 - 36 = 0 \iff (x-10)(x+2) = 0 \iff x = 10 \text{ ou } x = -2.$$

Remarque : Attention

On ne divise jamais les deux membres par une expression contenant x : elle pourrait être nulle. Par exemple, diviser $x^2 = 5x$ par x donnerait seulement $x = 5$ et ferait perdre la solution $x = 0$.