Identités remarquables et équations

Feuille d'exercices

Mathématiques – Seconde

Les exercices suivent l'ordre de la séquence. Chaque réponse doit être justifiée.

1 Mettre un problème en équation

Exercice 1: Deux problèmes à résoudre

1) Le périmètre d'un triangle isocèle est égal à 35 mm. La base mesure 7 mm de moins que chacun des côtés isocèles. Calculer les dimensions du triangle. On désignera par x la mesure d'un côté isocèle.
2) Un commerçant veut écouler 100 chemises démodées. Il réussit à en vendre 43 au prix initial. Il consent alors un rabais de 1 € par chemise et en vend ainsi 17. Il liquide le reste à 1,5 € l'unité. Calculer le prix initial d'une chemise, sachant qu'il a encaissé en tout 1 243 €.

Correction de l'exercice 1

1) Les côtés isocèles mesurent x mm et la base $(x-7)$ mm. Le périmètre donne :

$$x+x+(x-7)=35 \iff 3x-7=35 \iff 3x=42 \iff x=14.$$

Les côtés isocèles mesurent 14 mm et la base $14-7=7$ mm. (Vérification : $14+14+7=35$.)

2) On note p le prix initial d'une chemise, en euros. Il reste $100-43-17=40$ chemises vendues à 1,5 €.

$$43p+17(p-1)+40\times 1{,}5=1\,243 \iff 60p-17+60=1\,243 \iff 60p=1\,200 \iff p=20.$$

Le prix initial d'une chemise était de 20 €.

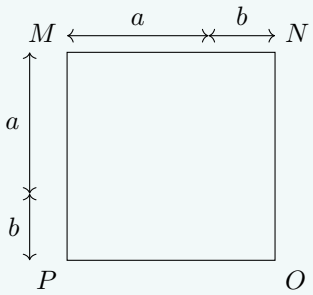
2 Découvrir les identités remarquables

Activité : Identités remarquables

On considère le carré $MNOP$ où a et b désignent des nombres positifs $(0 \leqslant b \leqslant a)$.
Exprimer en fonction de a et b la mesure MN du côté $[MN]$ du carré, puis son aire, que l'on notera $\mathcal{A}_{MNOP}$.

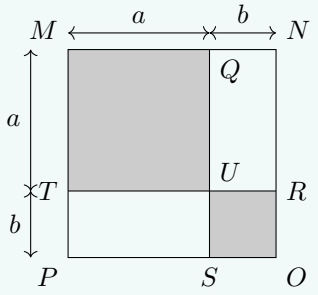
$$MN = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\boxed{\mathcal{A} = \mathcal{A}_{MNOP} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$



On découpe ce même carré en plusieurs parties. Exprimer en fonction de a et b :

Aire du carré $MQUT$:	$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_{MQUT} =$ .....
Aire du carré $UROS$:	$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_{UROS} =$ .....
Aire du rectangle $QNRU$:	$\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_{QNRU} =$ .....
Aire du rectangle $TUSP$:	$\mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_{TUSP} =$ .....



En déduire une relation algébrique que nous nommerons **1re identité remarquable**.

..... = ...

Correction de l'activité

$MN = a + b$, donc $\mathcal{A}_{MNOP} = (a+b)^2$.
$\mathcal{A}_1 = a^2$ $\mathcal{A}_2 = b^2$ $\mathcal{A}_3 = QN \times NR = b \times a = ab$ $\mathcal{A}_4 = TU \times TP = a \times b = ab$.
L'aire du grand carré est la somme des aires des quatre parties :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

3 Développer et factoriser

Exercice 2: Premiers développements (automatismes)

1. Associer les expressions qui sont égales pour tout nombre x (une seule réponse est correcte).

1re égalité $x(3x+4) = \ldots$	**2e égalité** $(x+3)(2x-4) = \ldots$	**3e égalité** $(x+10)^2 = \ldots$
☐ $3x^2 + 4$	☐ $3x - 1$	☐ $x^2 + 20x + 100$
☐ $7x^2$	☐ $2x^2 - 12$	☐ $x^2 + 20x + 20$
☐ $4x + 4$	☐ $2x^2 + 10x - 12$	☐ $x^2 + 20$
☐ $3x^2 + 4x$	☐ $2x^2 + 2x - 12$	☐ $x^2 + 100$

2. Développer les trois expressions suivantes : $x(5-2x)$, $(4x-6)(x+5)$ et $(2x+8)^2$.

Correction de l'exercice 2

1. $x(3x+4) = 3x^2 + 4x$; $(x+3)(2x-4) = 2x^2 - 4x + 6x - 12 = 2x^2 + 2x - 12$; $(x+10)^2 = x^2 + 20x + 100$.
2. $x(5-2x) = 5x - 2x^2$;
$(4x-6)(x+5) = 4x^2 + 20x - 6x - 30 = 4x^2 + 14x - 30$;
$(2x+8)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 8 + 8^2 = 4x^2 + 32x + 64$.

Exercice 3: Premiers programmes (initiative)

Voici deux programmes de calcul :

Programme 1
Choisir un nombre x
Ajouter 1
Calculer le carré du résultat

Programme 2
Choisir un nombre x
Calculer son carré
Ajouter le double de x au résultat
Ajouter 1 au résultat

1. On choisit $x = -6$ dans les deux programmes.
   Quel résultat est calculé par le programme 1 ? Entourer la bonne réponse :
   25 / 49 / -25 / -49.
   Quel résultat est calculé par le programme 2 ? Entourer la bonne réponse :
   25 / -49 / -47 / -23.
2. Compléter le tableau de valeurs suivant (les deux dernières colonnes : choisir deux nombres).

x choisi	0	9	0,1	-1	1 000		
Résultat prog 1							
Résultat prog 2							

3. Mise en commun des résultats de toute la classe...

Correction de l'exercice 3

1. Programme 1 : $-6+1=-5$, puis $(-5)^2=25$.
   Programme 2 : $(-6)^2=36$, puis $36+2\times(-6)=24$, puis $24+1=25$.
2.

x choisi	0	9	0,1	-1	1 000
Résultat prog 1	1	100	1,21	0	1 002 001
Résultat prog 2	1	100	1,21	0	1 002 001

3. Les deux programmes donnent toujours le même résultat. Le programme 1 calcule $(x+1)^2$ et le programme 2 calcule x^2+2x+1 : pour tout nombre x, $(x+1)^2=x^2+2x+1$ (1^{re} identité remarquable avec $a=x$ et $b=1$).

Exercice 4: Toutes les formules dans les deux sens (automatismes)

Compléter le tableau suivant avec les expressions qui conviennent.

Forme A		**Forme B**
$3x^2-2x$	$=$	
	$=$	$2x(x-6)$
$(x+1)^2$	$=$	
$(x+2)^2$	$=$	
$(x+3)^2$	$=$	
	$=$	$x^2+20x+100$

Forme développée		**Forme factorisée**
	$=$	$(x-1)^2$
	$=$	$(2x-1)^2$
$6x^2-8x$	$=$	
	$=$	$(x+2)(3x-5)$
$-40x+35x^2$	$=$	
$9x^2-6x+1$	$=$	

Correction de l'exercice 4

Forme A		Forme B
$3x^2 - 2x$	$=$	$x(3x-2)$
$2x^2 - 12x$	$=$	$2x(x-6)$
$(x+1)^2$	$=$	$x^2 + 2x + 1$
$(x+2)^2$	$=$	$x^2 + 4x + 4$
$(x+3)^2$	$=$	$x^2 + 6x + 9$
$(x+10)^2$	$=$	$x^2 + 20x + 100$

Forme développée		Forme factorisée
$x^2 - 2x + 1$	$=$	$(x-1)^2$
$4x^2 - 4x + 1$	$=$	$(2x-1)^2$
$6x^2 - 8x$	$=$	$2x(3x-4)$
$3x^2 + x - 10$	$=$	$(x+2)(3x-5)$
$-40x + 35x^2$	$=$	$5x(7x-8)$
$9x^2 - 6x + 1$	$=$	$(3x-1)^2$

Détail pour $(x+2)(3x-5) = 3x^2 - 5x + 6x - 10 = 3x^2 + x - 10$.

Exercice 5: Pour aller plus loin

Trouver la forme développée de $(a+b+c)^2$.

Correction de l'exercice 5

On pose $A = a + b$ et on utilise la 1re identité remarquable deux fois :

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 = (A+c)^2 &= A^2 + 2Ac + c^2 \\ &= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.\end{aligned}$$

Exercice 6: Exercice technique

Développement à l'aide des identités remarquables	Factorisation à l'aide des identités remarquables
Développer : $(5x+2)^2$	Factoriser (si c'est possible) : $25x^2 + 20x + 4$
$(x+2)(x-2)$	$4x^2 - 24x + 36$
$(9-4x)^2$	$x^2 + 4x + 1$
$(7x+2)^2$	$36 - 4x^2$
$(8x+y)^2$	$2x^2 + \left(10\sqrt{2}\right)x + 25$

Correction de l'exercice 6

Développements.

- $(5x+2)^2 = 25x^2 + 20x + 4$
- $(x+2)(x-2) = x^2 - 4$
- $(9-4x)^2 = 81 - 72x + 16x^2$
- $(7x+2)^2 = 49x^2 + 28x + 4$
- $(8x+y)^2 = 64x^2 + 16xy + y^2$

Factorisations.

— $25x^2+20x+4=(5x)^2+2\times 5x\times 2+2^2=(5x+2)^2$

— $4x^2-24x+36=(2x)^2-2\times 2x\times 6+6^2=(2x-6)^2$ (ou encore $4(x-3)^2$)

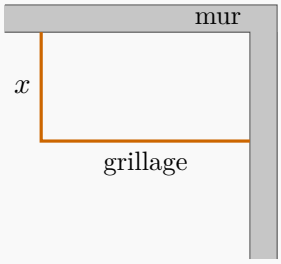
— x^2+4x+1 : pour avoir $(x+b)^2=x^2+2bx+b^2$ avec $2b=4$, il faudrait $b=2$ et donc un terme constant égal à 4, et non 1. Cette expression **ne se factorise pas** à l'aide des identités remarquables.

— $36-4x^2=6^2-(2x)^2=(6-2x)(6+2x)$

— $2x^2+\left(10\sqrt{2}\right)x+25=\left(\sqrt{2}\,x\right)^2+2\times\sqrt{2}\,x\times 5+5^2=\left(\sqrt{2}\,x+5\right)^2$

Exercice 7: Enclos

Jan souhaite poser un grillage au fond de son jardin afin de créer un enclos pour ses poules. Il possède 12 m de grillage. On note x la largeur de l'enclos. Jan souhaite faire un enclos de 27 m^2.



1) Montrer que le problème revient à résoudre l'équation $-x^2+12x-27=0$.
2) Développer $(x-3)(9-x)$.
3) Résoudre le problème de Jan.

Correction de l'exercice 7

1) Le grillage forme deux côtés de l'enclos (les deux autres sont le mur) : la largeur x et la longueur. Comme il mesure 12 m, la longueur vaut $12-x$. L'aire de l'enclos est donc $x(12-x)$ et l'on veut :

$$x(12-x)=27 \iff 12x-x^2=27 \iff -x^2+12x-27=0.$$

2) $(x-3)(9-x)=9x-x^2-27+3x=-x^2+12x-27$.

3) D'après la question 2, l'équation s'écrit $(x-3)(9-x)=0$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

$$x-3=0 \text{ ou } 9-x=0 \iff x=3 \text{ ou } x=9.$$

Les deux solutions conviennent ($0<x<12$). Jan peut faire un enclos de 3 m de large sur 9 m de long, ou de 9 m de large sur 3 m de long.

Exercice 8: Différence de deux carrés

En mettant en évidence une différence de deux carrés, factoriser les expressions suivantes.

1. $H=x^2-121$
2. $E=(x-4)^2-36$
3. $R=x^2-5$
4. $T=25-(2-x)^2$
5. $Z=(x+3)^2-(2x+4)^2$

Correction de l'exercice 8

On utilise $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

1. $H=x^2-11^2=(x-11)(x+11)$
2. $E=(x-4)^2-6^2=(x-4-6)(x-4+6)=(x-10)(x+2)$
3. $R=x^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$

4. $T = 5^2 - (2-x)^2 = \big(5-(2-x)\big)\big(5+(2-x)\big) = (3+x)(7-x)$
5. $Z = \big((x+3)-(2x+4)\big)\big((x+3)+(2x+4)\big) = (-x-1)(3x+7) = -(x+1)(3x+7)$

Exercice 9: Factoriser avec une identité remarquable

Factoriser en utilisant une identité remarquable.

1. $T = 9x^2 + 12x + 4$
2. $H = x^2 + 169 - 26x$
3. $A = 144x + 144x^2 + 36$
4. $L = 49x^2 + 25 - 70x$
5. $E = 9x^2 - 24x + 16$
6. $S = -22x + 121x^2 + 1$

Correction de l'exercice 9

On commence par ordonner l'expression, puis on repère a^2, b^2 et le double produit $2ab$.

1. $T = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = (3x+2)^2$
2. $H = x^2 - 26x + 169 = x^2 - 2 \times x \times 13 + 13^2 = (x-13)^2$
3. $A = 144x^2 + 144x + 36 = (12x)^2 + 2 \times 12x \times 6 + 6^2 = (12x+6)^2$ (ou encore $36(2x+1)^2$)
4. $L = 49x^2 - 70x + 25 = (7x)^2 - 2 \times 7x \times 5 + 5^2 = (7x-5)^2$
5. $E = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 4 + 4^2 = (3x-4)^2$
6. $S = 121x^2 - 22x + 1 = (11x)^2 - 2 \times 11x \times 1 + 1^2 = (11x-1)^2$

Exercice 10: Triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en A tel que $BC = x+7$ et $AC = 5$, où x désigne un nombre positif. Exprimer AB^2 en fonction de x sous forme factorisée.

Correction de l'exercice 10

Le triangle ABC est rectangle en A, donc d'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$, d'où :

$$AB^2 = BC^2 - AC^2 = (x+7)^2 - 5^2 = (x+7-5)(x+7+5) = (x+2)(x+12).$$

Exercice 11: Écrire sous la forme d'une seule fraction

Écrire sous la forme d'une seule fraction de la manière la plus simple possible.

1. $P = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-1}$
2. $V = \dfrac{5}{2x-1} + 1$
3. $L = \dfrac{4}{x} + \dfrac{x-1}{3x+5}$
4. $I = \dfrac{x}{1-5x} + \dfrac{2}{x+1}$
5. $U = \dfrac{3x-2}{5x-3} - \dfrac{2-3x}{7x-2}$
6. $T = \dfrac{5-12x}{3x-5} + \dfrac{-60x+25}{-6x-13}$
7. $S = \dfrac{3x+4}{2x-9} \times \dfrac{4x^2-36x+81}{9x^2-16}$
8. $E = \dfrac{x^2-2x+1}{(23x-5)^2} \times \dfrac{46x-10}{1-x}$

Correction de l'exercice 11

Les calculs sont valables pour les valeurs de x qui n'annulent aucun dénominateur.

1. $P = \dfrac{(x-1)+2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{3x+1}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{3x+1}{x^2-1}$
2. $V = \dfrac{5+(2x-1)}{2x-1} = \dfrac{2x+4}{2x-1}$
3. $L = \dfrac{4(3x+5)+x(x-1)}{x(3x+5)} = \dfrac{x^2+11x+20}{x(3x+5)}$
4. $I = \dfrac{x(x+1)+2(1-5x)}{(1-5x)(x+1)} = \dfrac{x^2-9x+2}{(1-5x)(x+1)}$
5. Comme $2-3x = -(3x-2)$:

$$U = \frac{3x-2}{5x-3} + \frac{3x-2}{7x-2} = \frac{(3x-2)(7x-2)+(3x-2)(5x-3)}{(5x-3)(7x-2)} = \frac{(3x-2)(12x-5)}{(5x-3)(7x-2)}$$

6. Comme $-60x+25 = 5(5-12x)$:

$$\begin{aligned} T &= (5-12x)\left(\frac{1}{3x-5} + \frac{5}{-6x-13}\right) = \frac{(5-12x)\big((-6x-13)+5(3x-5)\big)}{(3x-5)(-6x-13)} \\ &= \frac{(5-12x)(9x-38)}{(3x-5)(-6x-13)} = \frac{(12x-5)(9x-38)}{(3x-5)(6x+13)} \end{aligned}$$

7. $4x^2-36x+81 = (2x-9)^2$ et $9x^2-16 = (3x-4)(3x+4)$, donc

$$S = \frac{(3x+4)(2x-9)^2}{(2x-9)(3x-4)(3x+4)} = \frac{2x-9}{3x-4}$$

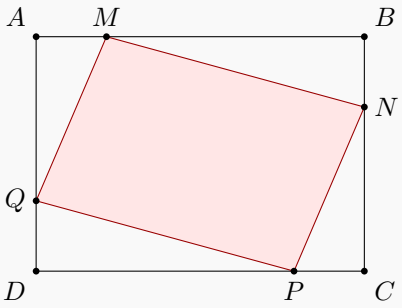
8. $x^2-2x+1 = (x-1)^2$, $46x-10 = 2(23x-5)$ et $1-x = -(x-1)$, donc

$$E = \frac{(x-1)^2 \times 2(23x-5)}{(23x-5)^2 \times \big(-(x-1)\big)} = \frac{-2(x-1)}{23x-5} = \frac{2(1-x)}{23x-5}$$

4 Exercice de synthèse

Exercice 12: Des intermittents du spectacle

On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 7$ cm et $BC = 5$ cm, et un point $M \in [AB]$ (ce qui signifie que M appartient au segment $[AB]$). On note $AM = x$ cm.
On a placé sur la figure les points N, P et Q tels que $AM = BN = CP = DQ$.
Soit f la fonction qui à x associe l'aire du quadrilatère $MNPQ$.



On se propose de déterminer la valeur de x telle que l'aire du quadrilatère $MNPQ$ soit égale à 17 cm^2.

1) Dans cette question uniquement, on considère que $x = 2$. Calculer l'aire des triangles AMQ et MBN, et en déduire $f(2)$. *(Appeler le professeur si vous ne comprenez pas la question.)*
2) Tracer la figure si $x = 4$. Déterminer $f(4)$.
3) Compléter le tableau de valeurs suivant :

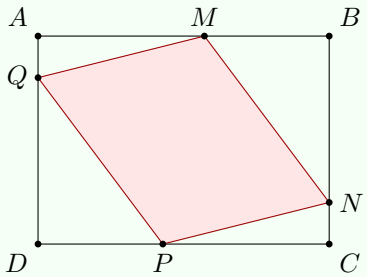
x	1	2	3,5	4	x
$f(x)$					

4) Déterminer l'expression algébrique de f (l'écriture de la forme $f(x) = \dots$).
5) Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 17$.
Astuce : une factorisation grâce aux identités remarquables est peut-être utile.

Correction de l'exercice 12

Comme $Q \in [DA]$ et $DQ = x$ avec $DA = 5$, on a $0 \leqslant x \leqslant 5$. L'aire de $MNPQ$ s'obtient en retirant à l'aire du rectangle (35 cm^2) celles des quatre triangles rectangles aux coins.

1) Pour $x = 2$: $AM = 2$ et $AQ = 5 - 2 = 3$, donc $\mathcal{A}_{AMQ} = \dfrac{2 \times 3}{2} = 3$ cm^2. $MB = 7 - 2 = 5$ et $BN = 2$, donc $\mathcal{A}_{MBN} = \dfrac{5 \times 2}{2} = 5$ cm^2.
De même, $\mathcal{A}_{NCP} = \mathcal{A}_{AMQ} = 3$ et $\mathcal{A}_{PDQ} = \mathcal{A}_{MBN} = 5$. Donc $f(2) = 35 - 2\times3 - 2\times5 = 19$ cm^2.
2) Pour $x = 4$: $\mathcal{A}_{AMQ} = \dfrac{4 \times 1}{2} = 2$ et $\mathcal{A}_{MBN} = \dfrac{3 \times 4}{2} = 6$, donc $f(4) = 35 - 2\times2 - 2\times6 = 19$ cm^2.



3) Pour tout x, $\mathcal{A}_{AMQ} = \mathcal{A}_{NCP} = \dfrac{x(5-x)}{2}$ et $\mathcal{A}_{MBN} = \mathcal{A}_{PDQ} = \dfrac{x(7-x)}{2}$, donc

$$f(x) = 35 - x(5-x) - x(7-x) = 35 - 5x + x^2 - 7x + x^2 = 2x^2 - 12x + 35.$$

x	1	2	3,5	4	x
$f(x)$	25	19	17,5	19	$2x^2-12x+35$

4) $f(x) = 2x^2 - 12x + 35$ (voir le calcul ci-dessus).

5)

$$f(x) = 17 \iff 2x^2 - 12x + 18 = 0 \iff 2(x^2 - 6x + 9) = 0$$
$$\iff 2(x-3)^2 = 0 \iff x - 3 = 0 \iff x = 3.$$

L'aire de $MNPQ$ vaut 17 cm^2 pour $x = 3$ (et seulement pour cette valeur).