

Le raisonnement par récurrence

Mathématiques – Terminale, enseignement de spécialité

Suites – Partie 1

Table des matières

1	Le principe du raisonnement par récurrence	1
1.1	L'idée : la file de dominos	1
1.2	Définition et principe	1
2	Exemples avec les suites	2
2.1	Démontrer l'expression générale d'une suite	2
2.2	Démontrer la monotonie d'une suite	3
3	L'inégalité de Bernoulli	4
4	L'initialisation est indispensable	5
5	Bilan	5

1 Le principe du raisonnement par récurrence

C'est au mathématicien italien Giuseppe Peano (1858 – 1932) que l'on attribue le principe du raisonnement par récurrence. Le nom a probablement été donné par Henri Poincaré (1854 – 1912).

1.1 L'idée : la file de dominos

On considère une file illimitée de dominos placés côte à côte. La règle veut que **lorsqu'un domino tombe, il fait tomber le domino suivant**, et ceci à n'importe quel niveau de la file.

Alors, si le **premier** domino tombe, on est assuré que **tous** les dominos de la file tombent.

Les deux ingrédients	
Initialisation (le premier domino tombe)	On vérifie que la propriété est vraie au(x) premier(s) rang(s).
Hérédité (si le domino k tombe, alors le domino $k + 1$ tombe)	On suppose la propriété vraie à un rang k fixé (<i>hypothèse de récurrence</i>), et on démontre qu'elle est alors vraie au rang $k + 1$.

1.2 Définition et principe

Définition 1.1: Propriété héréditaire

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n , et soit n_0 un entier naturel. On dit que la propriété $\mathcal{P}$ est **héréditaire à partir du rang n_0** si, pour tout entier $k \geq n_0$:

$$\mathcal{P}(k) \text{ vraie} \implies \mathcal{P}(k + 1) \text{ vraie.}$$

Dans l'exemple des dominos, si on suppose qu'un domino (k) tombe, alors le domino suivant ($k + 1$) tombe également : la propriété « le domino n° n tombe » est héréditaire.

Théorème 1.2: Principe du raisonnement par récurrence

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n , et soit n_0 un entier naturel.

Si :

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*) ;
- $\mathcal{P}$ est héréditaire à partir du rang n_0 (*hérédité*) ;

alors la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Dans l'exemple des dominos, le premier domino tombe : c'est l'initialisation, ici $n_0 = 1$. L'hérédité est vérifiée par la règle du jeu. On en déduit que tous les dominos tombent.

Remarque : Quand utiliser la récurrence ?

Une démonstration par récurrence sur les entiers est mise en œuvre lorsqu'une démonstration « classique » (directe) est difficile ou impossible. C'est typiquement le cas quand la propriété au rang $n + 1$ s'exprime naturellement en fonction de celle au rang n : suites définies par récurrence, sommes, inégalités dépendant de n , divisibilité...

Méthode 1.3: Rédiger une démonstration par récurrence

1. **Énoncer la propriété.** Écrire clairement : « Pour tout entier $n \geq n_0$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : ... »
2. **Initialisation.** Vérifier que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie, en calculant *séparément* les deux membres.
3. **Hérédité.** Écrire : « Supposons qu'il existe un rang $k \geq n_0$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire ..., et montrons que $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie, c'est-à-dire ... » On écrit donc d'abord ce que l'on suppose, puis ce qu'il faut obtenir, avant de faire le calcul.
4. **Conclusion.** « D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou tout $n \geq n_0$), on a ... »

Remarque : Erreurs de rédaction fréquentes

- Ne pas écrire « Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour tout n » : on supposerait ce que l'on cherche à démontrer ! On écrit « supposons qu'il **existe** un rang $k \geq n_0$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie ».
- Ne pas partir de l'égalité (ou de l'inégalité) à démontrer au rang $k + 1$ pour aboutir à quelque chose de vrai : on part de ce que l'on sait, et on arrive à ce qu'il faut prouver.
- Ne jamais oublier l'initialisation (voir la section 4).

2 Exemples avec les suites

2.1 Démontrer l'expression générale d'une suite

Méthode 2.1: Démontrer par récurrence l'expression générale d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = (n + 1)^2$.

Pour tout entier naturel n , on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n = (n + 1)^2$ ».

Initialisation.

Le premier domino tombe.

D'une part $u_0 = 1$, d'autre part $(0 + 1)^2 = 1$. Donc $u_0 = (0 + 1)^2$: la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_k = (k+1)^2$, et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} = (k+1+1)^2$, soit encore :

$$u_{k+1} = (k+2)^2.$$

On suppose que le domino n° k tombe ; le domino n° $k+1$ tombe-t-il ?

On a :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 && \text{par définition de la suite} \\ &= (k+1)^2 + 2k + 3 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= k^2 + 2k + 1 + 2k + 3 \\ &= k^2 + 4k + 4 \\ &= (k+2)^2. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.

Le domino n° $k+1$ tombe.

Conclusion.

Tous les dominos tombent.

D'après le principe de récurrence :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)^2$.

2.2 Démontrer la monotonie d'une suite

Le raisonnement par récurrence permet aussi d'établir le **sens de variation** d'une suite définie par récurrence, lorsque l'on ne dispose pas d'une expression explicite de u_n en fonction de n .

Méthode 2.2: Démontrer la monotonie par récurrence

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Il s'agit de démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} \geq u_n$.

Pour tout entier naturel n , on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_{n+1} \geq u_n$ ».

Initialisation.

On a $u_0 = 2$ et

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 2 + 2 = \frac{8}{3} > 2.$$

Donc $u_1 \geq u_0$: la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} \geq u_k$, et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+2} \geq u_{k+1}$.

On a $u_{k+1} \geq u_k$, donc, en multipliant par $\frac{1}{3} > 0$ (l'ordre est conservé) :

$$\frac{1}{3}u_{k+1} \geq \frac{1}{3}u_k,$$

puis, en ajoutant 2 aux deux membres :

$$\frac{1}{3}u_{k+1} + 2 \geq \frac{1}{3}u_k + 2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_{k+2} \geq u_{k+1}.$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.

Conclusion.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$: la suite (u_n) est **croissante**.

Remarque : Multiplier une inégalité

Dans l'hérédité ci-dessus, on a utilisé le fait que multiplier les deux membres d'une inégalité par un réel **strictement positif** conserve le sens de l'inégalité, et que l'on peut ajouter un même réel aux deux membres. Si le coefficient avait été négatif, l'inégalité aurait changé de sens.

3 L'inégalité de Bernoulli**Théorème 3.1: Inégalité de Bernoulli**

Soit a un nombre réel positif. Pour tout entier naturel n , on a :

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Démonstration exigible au programme.

Démonstration. Soit a un réel positif. Pour tout entier naturel n , on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $(1 + a)^n \geq 1 + na$ ».

Initialisation.

Pour $n = 0$: d'une part $(1 + a)^0 = 1$, d'autre part $1 + 0 \times a = 1$. On a bien $1 \geq 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $(1 + a)^k \geq 1 + ka$, et montrons que $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie, c'est-à-dire que $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$.

Comme $a \geq 0$, on a $1 + a > 0$. En multipliant les deux membres de l'hypothèse de récurrence par $1 + a$, l'ordre est conservé :

$$(1 + a)(1 + a)^k \geq (1 + a)(1 + ka),$$

soit

$$(1 + a)^{k+1} \geq 1 + ka + a + ka^2 = 1 + (k + 1)a + ka^2.$$

Or $k \geq 0$ et $a^2 \geq 0$, donc $ka^2 \geq 0$ et par conséquent

$$1 + (k + 1)a + ka^2 \geq 1 + (k + 1)a.$$

Par transitivité, $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$. Donc $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie.

Conclusion.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$. □

Remarque : Une inégalité utile

L'inégalité de Bernoulli sert notamment à établir que, pour $q > 1$, la suite géométrique (q^n) tend vers $+\infty$: en écrivant $q = 1 + a$ avec $a > 0$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q^n \geq 1 + na$, et $1 + na$ devient aussi grand que l'on veut.

4 L'initialisation est indispensable

Remarque : Sans initialisation, on démontre n'importe quoi !

L'hérédité seule ne suffit pas : une propriété peut être héréditaire **sans jamais être vraie**. Si aucun domino ne tombe au départ, la règle « le domino k fait tomber le domino $k + 1$ » n'a jamais l'occasion de s'appliquer.

Exemple 4.1: Une propriété héréditaire et pourtant toujours fausse

Pour tout entier naturel n , considérons la propriété $\mathcal{P}(n)$: « 2^n est divisible par 3 ».

Hérédité. Supposons qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie : il existe alors un entier p tel que $2^k = 3p$. Montrons que $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie, c'est-à-dire que 2^{k+1} est divisible par 3.

On a alors :

$$2^{k+1} = 2^k \times 2 = 3p \times 2 = 3 \times (2p),$$

et $2p$ est un entier : donc 2^{k+1} est divisible par 3, c'est-à-dire que $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie.

La propriété est donc bien **héréditaire** !

Et pourtant... $\mathcal{P}(n)$ n'est vraie pour *aucun* entier n : 2^n n'est jamais divisible par 3, puisque 2^n n'admet que 2 comme facteur premier.

L'initialisation est impossible ($2^0 = 1$ n'est pas divisible par 3), et c'est bien pour cela que la conclusion du principe de récurrence ne s'applique pas.

5 Bilan

Bilan

- Une propriété $\mathcal{P}$ est **héréditaire** à partir du rang n_0 si, pour tout $k \geq n_0$, $\mathcal{P}(k)$ vraie entraîne $\mathcal{P}(k + 1)$ vraie.
- **Principe de récurrence** : si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*) et si $\mathcal{P}$ est héréditaire à partir de n_0 (*hérédité*), alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.
- Une démonstration par récurrence se rédige toujours en quatre temps : énoncé de la propriété, initialisation, hérédité, conclusion.
- L'hérédité se démontre à k **fixé** : on suppose $\mathcal{P}(k)$, on en déduit $\mathcal{P}(k + 1)$.
- **L'initialisation est indispensable** : une propriété héréditaire peut n'être vraie à aucun rang.
- **Inégalité de Bernoulli** : pour tout réel $a \geq 0$ et tout entier naturel n , $(1 + a)^n \geq 1 + na$ (*démonstration exigible*).

Conclusion

Le raisonnement par récurrence est l'outil qui permet de passer d'observations sur les premiers termes d'une suite à une preuve valable pour *tous* les entiers. Il sera constamment réutilisé dans la suite du chapitre : pour établir une expression explicite, une monotonie ou une majoration, puis, avec les théorèmes de comparaison, pour déterminer la **limite** d'une suite.