

# Suites et raisonnement par récurrence

Mathématiques – Terminale, enseignement de spécialité

Feuille d'exercices complète

## Table des matières

|   |                                                      |    |
|---|------------------------------------------------------|----|
| 1 | Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques | 1  |
| 2 | Activité : découverte du raisonnement par récurrence | 4  |
| 3 | Exercices : raisonnement par récurrence              | 5  |
| 4 | Récurrence, dérivation et monotonie                  | 9  |
| 5 | Sommes de termes consécutifs                         | 10 |
| 6 | Exercices finaux                                     | 12 |

## 1 Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques

### Exercice 1: Reconnaître la nature d'une suite

Déterminer la nature des suites suivantes (arithmétique, géométrique, ou ni l'une ni l'autre), en précisant le cas échéant le premier terme et la raison. Les égalités sont données pour tout entier naturel  $n$  (pour tout entier  $n \geq 1$  dans le cas e).

- |                                                                    |                                                                           |                                                             |
|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| a) $u_n = 0,8n + 3$                                                | b) $u_n = \frac{3n+1}{5}$                                                 | c) $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$                                 |
| d) $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{7}u_n \\ u_0 = 5 \end{cases}$ | e) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{1}{3}u_n \\ u_1 = -2 \end{cases}$ | f) $\begin{cases} u_{n+1} - u_n = 4 \\ u_0 = 8 \end{cases}$ |
| g) $\begin{cases} u_{n+1} = n + u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}$        | h) $u_n = \frac{5}{2^n}$                                                  | i) $u_n = \frac{3^{n+1}}{2^n}$                              |

### Correction de l'exercice 1

- a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = 0,8(n+1) + 3 - (0,8n + 3) = 0,8$  : suite **arithmétique** de raison 0,8 et de premier terme  $u_0 = 3$ .
- b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{3}{5}n + \frac{1}{5}$  : suite **arithmétique** de raison  $\frac{3}{5}$  et de premier terme  $u_0 = \frac{1}{5}$ .
- c)  $u_0 = \frac{1}{3}$ ,  $u_1 = \frac{3}{4}$ ,  $u_2 = 1$ . On a  $u_1 - u_0 = \frac{5}{12}$  et  $u_2 - u_1 = \frac{1}{4}$  : les différences ne sont pas constantes. De plus  $\frac{u_1}{u_0} = \frac{9}{4}$  et  $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{3}$  : les quotients ne le sont pas non plus. La suite n'est **ni arithmétique ni géométrique**.
- d) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{2}{7}u_n$  : suite **géométrique** de raison  $\frac{2}{7}$  et de premier terme  $u_0 = 5$ .

- e) Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{3}u_n = \frac{4}{3}u_n$  : suite **géométrique** de raison  $\frac{4}{3}$  et de premier terme  $u_1 = -2$ .
- f) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = 4$  : suite **arithmétique** de raison 4 et de premier terme  $u_0 = 8$ .
- g) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = n$  : la différence dépend de  $n$ , elle n'est pas constante. Comme  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 2$ , les quotients  $\frac{u_1}{u_0} = 1$  et  $\frac{u_2}{u_1} = 2$  ne sont pas constants non plus : **ni arithmétique ni géométrique**.
- h) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$  : suite **géométrique** de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme  $u_0 = 5$ .
- i) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{3 \times 3^n}{2^n} = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$  : suite **géométrique** de raison  $\frac{3}{2}$  et de premier terme  $u_0 = 3$ .

### Exercice 2: Suite auxiliaire arithmétique

On considère la suite  $(u_n)$  définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- a) Déterminer les cinq premiers termes de la suite  $(u_n)$ , puis faire une conjecture sur l'expression de son terme général.
- b) On suppose  $u_n \neq 0$  pour tout entier naturel  $n$  et on pose  $v_n = \frac{1}{u_n}$ . Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
- c) En déduire l'expression de  $v_n$ , puis celle de  $u_n$ , en fonction de  $n$ .

### Correction de l'exercice 2

- a)  $u_0 = 1$ , puis

$$u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad u_2 = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}, \quad u_3 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}, \quad u_4 = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{5}.$$

On conjecture que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{1}{n+1}$ .

- b) Pour tout entier naturel  $n$  :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1+u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} + \frac{u_n}{u_n} = v_n + 1.$$

La différence  $v_{n+1} - v_n = 1$  est constante :  $(v_n)$  est **arithmétique** de raison 1, de premier terme  $v_0 = \frac{1}{u_0} = 1$ .

- c) On en déduit, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = v_0 + n \times 1 = n + 1$ , puis

$$u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{n+1},$$

ce qui confirme la conjecture de la question a).

**Exercice 3: Suite auxiliaire géométrique**

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$$

1. Calculer les 4 premiers termes de cette suite.
2. Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = u_n - 6$ . Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.
3. En déduire l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ , puis celle de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Correction de l'exercice 3**

1.  $u_0 = 3$ , et

$$u_1 = \frac{1}{3} \times 3 + 4 = 5, \quad u_2 = \frac{5}{3} + 4 = \frac{17}{3}, \quad u_3 = \frac{1}{3} \times \frac{17}{3} + 4 = \frac{17}{9} + 4 = \frac{53}{9}.$$

2. Pour tout entier naturel  $n$ , de  $v_n = u_n - 6$  on tire  $u_n = v_n + 6$ .

Soit  $n$  un entier naturel. On part de la définition de  $v_{n+1}$  :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6.$$

On remplace  $u_{n+1}$  par son expression en fonction de  $u_n$  :

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3}u_n - 2.$$

On remplace enfin  $u_n$  par son expression en fonction de  $v_n$  :

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n + 6) - 2 = \frac{1}{3}v_n + 2 - 2 = \frac{1}{3}v_n.$$

Donc  $(v_n)$  est **géométrique** de raison  $q = \frac{1}{3}$ , de premier terme  $v_0 = u_0 - 6 = 3 - 6 = -3$ .

3. On en déduit, pour tout entier naturel  $n$  :

$$v_n = v_0 \times q^n = -3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad \text{puis} \quad u_n = v_n + 6 = 6 - 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

*Vérification* :  $u_0 = 6 - 3 = 3$  et  $u_1 = 6 - 1 = 5$ .

**Exercice 4: Suite auxiliaire géométrique (bis)**

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
2. On définit la suite  $(v_n)$  par : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = 4u_n - 8n + 24$ .

- a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique, dont on précisera le premier terme et la raison.
- b) En déduire l'expression de  $v_n$ , puis celle de  $u_n$ , en fonction de  $n$ .

### Correction de l'exercice 4

1.

$$u_1 = \frac{1}{2} \times 1 + 0 - 1 = -\frac{1}{2}, \quad u_2 = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 - 1 = -\frac{1}{4},$$

$$u_3 = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 2 - 1 = \frac{7}{8}.$$

2. a) Pour tout entier naturel  $n$ , de  $v_n = 4u_n - 8n + 24$  on tire  $u_n = \frac{v_n + 8n - 24}{4}$ .  
Soit  $n$  un entier naturel. On part de la définition de  $v_{n+1}$  :

$$v_{n+1} = 4u_{n+1} - 8(n+1) + 24.$$

On remplace  $u_{n+1}$  par son expression en fonction de  $u_n$  :

$$v_{n+1} = 4\left(\frac{1}{2}u_n + n - 1\right) - 8n - 8 + 24 = 2u_n + 4n - 4 - 8n + 16 = 2u_n - 4n + 12.$$

On remplace enfin  $u_n$  par son expression en fonction de  $v_n$  :

$$v_{n+1} = 2 \times \frac{v_n + 8n - 24}{4} - 4n + 12 = \frac{v_n}{2} + 4n - 12 - 4n + 12 = \frac{1}{2}v_n.$$

Donc  $(v_n)$  est **géométrique** de raison  $q = \frac{1}{2}$ , de premier terme  $v_0 = 4 \times 1 - 8 \times 0 + 24 = 28$ .

- b) On en déduit, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = 28 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ . Comme  $v_n = 4u_n - 8n + 24$ , on obtient

$$u_n = \frac{v_n + 8n - 24}{4} = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6.$$

Vérification :  $u_0 = 7 - 6 = 1$ ,  $u_1 = 3,5 + 2 - 6 = -0,5$ ,  $u_2 = 1,75 + 4 - 6 = -0,25$ .

## 2 Activité : découverte du raisonnement par récurrence

### Activité : Conjecturer puis démontrer

On considère la suite  $(u_n)$  définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \\ u_0 = 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Calculer les termes  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$ .
- Conjecturer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- Démontrer cette conjecture.

## Correction de l'activité

1.

$$u_1 = 1 + 0 + 3 = 4, \quad u_2 = 4 + 2 + 3 = 9, \quad u_3 = 9 + 4 + 3 = 16, \quad u_4 = 16 + 6 + 3 = 25.$$

2. On reconnaît  $1 = 1^2$ ,  $4 = 2^2$ ,  $9 = 3^2$ ,  $16 = 4^2$ ,  $25 = 5^2$ . On conjecture donc que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = (n + 1)^2.$$

3. Pour tout entier naturel  $n$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété : «  $u_n = (n + 1)^2$  ».

**Initialisation.**  $u_0 = 1$  et  $(0 + 1)^2 = 1$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

**Hérédité.** Supposons qu'il existe un rang  $k \geq 0$  tel que  $\mathcal{P}(k)$  soit vraie, c'est-à-dire

$$u_k = (k + 1)^2,$$

et montrons que  $\mathcal{P}(k + 1)$  est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{k+1} = (k + 2)^2.$$

On a

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 && \text{par définition de la suite} \\ &= (k + 1)^2 + 2k + 3 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= k^2 + 2k + 1 + 2k + 3 = k^2 + 4k + 4 = (k + 2)^2. \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{P}(k + 1)$  est vraie.

**Conclusion.** D'après le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = (n + 1)^2$ .

## 3 Exercices : raisonnement par récurrence

## Exercice 5: Expression explicite d'une suite

On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = -2u_n + 9$ .  
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = (-2)^{n+1} + 3.$$

## Correction de l'exercice 5

Pour tout entier naturel  $n$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété : «  $u_n = (-2)^{n+1} + 3$  ».

**Initialisation.**  $u_0 = 1$  et  $(-2)^1 + 3 = -2 + 3 = 1$ . Donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

**Hérédité.** Supposons qu'il existe un rang  $k \geq 0$  tel que  $\mathcal{P}(k)$  soit vraie, c'est-à-dire

$$u_k = (-2)^{k+1} + 3,$$

et montrons que  $\mathcal{P}(k + 1)$  est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{k+1} = (-2)^{k+2} + 3.$$

On a

$$\begin{aligned}
 u_{k+1} &= -2u_k + 9 && \text{par définition de la suite} \\
 &= -2((-2)^{k+1} + 3) + 9 && \text{par hypothèse de récurrence} \\
 &= (-2)^{k+2} - 6 + 9 = (-2)^{k+2} + 3.
 \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie.

**Conclusion.** D'après le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = (-2)^{n+1} + 3$ .

### Exercice 6: Conjecturer puis démontrer

On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_0 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n^2}$ .

1. Calculer les premiers termes et conjecturer une formule explicite pour  $u_n$ .
2. Démontrer par récurrence votre conjecture.

### Correction de l'exercice 6

1.

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \sqrt{4+0} = 2, & u_2 &= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \\
 u_3 &= \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, & u_4 &= \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4 = 2\sqrt{4}.
 \end{aligned}$$

En écrivant  $u_0 = 0 = 2\sqrt{0}$  et  $u_1 = 2 = 2\sqrt{1}$ , on conjecture que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = 2\sqrt{n}.$$

2. Pour tout entier naturel  $n$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété : «  $u_n = 2\sqrt{n}$  ».

**Initialisation.**  $u_0 = 0$  et  $2\sqrt{0} = 0$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

**Hérédité.** Supposons qu'il existe un rang  $k \geq 0$  tel que  $\mathcal{P}(k)$  soit vraie, c'est-à-dire

$$u_k = 2\sqrt{k},$$

et montrons que  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{k+1} = 2\sqrt{k+1}.$$

On a

$$u_{k+1} = \sqrt{4 + u_k^2} = \sqrt{4 + (2\sqrt{k})^2} = \sqrt{4 + 4k} = \sqrt{4(k+1)} = 2\sqrt{k+1}.$$

Donc  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie.

**Conclusion.** D'après le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2\sqrt{n}$ .

### Exercice 7: Une minoration

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times (0,5)^n \end{cases}$$

1. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,

$$u_n \geq \frac{15}{4} \times (0,5)^n.$$

### Correction de l'exercice 7

1.

$$u_1 = \frac{1}{5} \times 2 + 3 \times (0,5)^0 = \frac{2}{5} + 3 = \frac{17}{5} = 3,4,$$

$$u_2 = \frac{1}{5} \times \frac{17}{5} + 3 \times 0,5 = \frac{17}{25} + \frac{3}{2} = 0,68 + 1,5 = 2,18.$$

2. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété : «  $u_n \geq \frac{15}{4} \times (0,5)^n$  ».

**Initialisation.** Pour  $n = 1$  :  $u_1 = 3,4$  et  $\frac{15}{4} \times 0,5 = 1,875$ . Comme  $3,4 \geq 1,875$ ,  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.

**Hérédité.** Supposons qu'il existe un rang  $k \geq 1$  tel que  $\mathcal{P}(k)$  soit vraie, c'est-à-dire

$$u_k \geq \frac{15}{4} \times (0,5)^k,$$

et montrons que  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{k+1} \geq \frac{15}{4} \times (0,5)^{k+1}.$$

Comme  $\frac{1}{5} > 0$ , on peut multiplier l'hypothèse de récurrence par  $\frac{1}{5}$  sans en changer le sens, puis ajouter  $3 \times (0,5)^k$  aux deux membres :

$$u_{k+1} = \frac{1}{5}u_k + 3 \times (0,5)^k \geq \frac{1}{5} \times \frac{15}{4} \times (0,5)^k + 3 \times (0,5)^k = \left(\frac{3}{4} + 3\right) (0,5)^k = \frac{15}{4} \times (0,5)^k.$$

Or  $(0,5)^k = 2 \times (0,5)^{k+1} \geq (0,5)^{k+1}$ , donc

$$u_{k+1} \geq \frac{15}{4} \times (0,5)^{k+1}.$$

Donc  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie.

**Conclusion.** D'après le principe de récurrence, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_n \geq \frac{15}{4} \times (0,5)^n$ .

#### Remarque : Pourquoi commencer à $n = 1$ ?

Au rang 0, l'inégalité est **fausse** :  $u_0 = 2$  alors que  $\frac{15}{4} \times (0,5)^0 = 3,75$ . L'hérédité, elle, est vraie dès le rang 0 : cela illustre une nouvelle fois qu'une propriété héréditaire n'est vraie qu'à partir du rang où l'initialisation fonctionne.

**Exercice 8: Sommes et inégalité**

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n \neq 0$ ,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2.$$

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,

$$5^n \geq 4^n + 3^n.$$

**Correction de l'exercice 8**

1. Pour tout entier  $n \geq 1$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  : «  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  ».

**Initialisation.** Pour  $n = 1$  : le membre de gauche vaut 1 et  $\frac{1 \times 2}{2} = 1$ . Donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.

**Hérédité.** Supposons qu'il existe un rang  $k \geq 1$  tel que  $\mathcal{P}(k)$  soit vraie, c'est-à-dire

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

et montrons que  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire que

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

On a

$$\underbrace{1 + 2 + \dots + k}_{= \frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1) \left( \frac{k}{2} + 1 \right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Donc  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie.

**Conclusion.** D'après le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

2. Pour tout entier naturel  $n$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  : «  $1 + 3 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$  ».

**Initialisation.** Pour  $n = 0$  : le membre de gauche se réduit à 1 et  $(0+1)^2 = 1$ . Donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

**Hérédité.** Supposons qu'il existe un rang  $k \geq 0$  tel que  $\mathcal{P}(k)$  soit vraie, c'est-à-dire

$$1 + 3 + \dots + (2k+1) = (k+1)^2,$$

et montrons que  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire que

$$1 + 3 + \dots + (2k+1) + (2k+3) = (k+2)^2,$$

le terme suivant de la somme étant  $2(k+1) + 1 = 2k+3$ . On a

$$\underbrace{1 + 3 + \dots + (2k+1)}_{=(k+1)^2} + (2k+3) = k^2 + 2k + 1 + 2k + 3 = k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2.$$

Donc  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie.

**Conclusion.** D'après le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1+3+\dots+(2n+1) = (n+1)^2$ .

3. Pour tout entier  $n \geq 2$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  : «  $5^n \geq 4^n + 3^n$  ».

**Initialisation.** Pour  $n = 2$  :  $5^2 = 25$  et  $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$ . On a bien  $25 \geq 25$ , donc  $\mathcal{P}(2)$  est vraie.

**Hérédité.** Supposons qu'il existe un rang  $k \geq 2$  tel que  $\mathcal{P}(k)$  soit vraie, c'est-à-dire

$$5^k \geq 4^k + 3^k,$$

et montrons que  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire que

$$5^{k+1} \geq 4^{k+1} + 3^{k+1}.$$

En multipliant l'hypothèse de récurrence par  $5 > 0$  :

$$5^{k+1} = 5 \times 5^k \geq 5 \times 4^k + 5 \times 3^k.$$

Or  $5 \geq 4$  et  $5 \geq 3$ , donc  $5 \times 4^k \geq 4 \times 4^k = 4^{k+1}$  et  $5 \times 3^k \geq 3 \times 3^k = 3^{k+1}$ . Par somme,

$$5^{k+1} \geq 4^{k+1} + 3^{k+1}.$$

Donc  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie.

**Conclusion.** D'après le principe de récurrence, pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $5^n \geq 4^n + 3^n$ .

*Remarque :* l'inégalité est fausse pour  $n = 1$  ( $5 < 7$ ) et pour  $n = 0$  ( $1 < 2$ ) : le rang initial 2 est indispensable.

## 4 Récurrence, dérivation et monotonie

### Exercice 9: D'après BAC 2021, Métropole

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}.$$

1. Montrer que la fonction  $f$  définie pour tout  $x \in [0; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{5x + 4}{x + 2}$$

est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

### Correction de l'exercice 9

1. La fonction  $f$  est une fonction rationnelle, dérivable sur  $[0; +\infty[$  car  $x + 2 \neq 0$  sur cet intervalle. En posant  $u(x) = 5x + 4$  et  $v(x) = x + 2$ , on a  $u'(x) = 5$  et  $v'(x) = 1$ ,

donc, pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{5(x+2) - (5x+4) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{5x+10-5x-4}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}.$$

Pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,  $(x+2)^2 > 0$  et  $6 > 0$ , donc  $f'(x) > 0$  : la fonction  $f$  est **strictement croissante** sur  $[0; +\infty[$ .

2. On remarque d'abord que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété : «  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$  ».

**Initialisation.**  $u_0 = 1$  et

$$u_1 = \frac{5 \times 1 + 4}{1 + 2} = \frac{9}{3} = 3.$$

On a bien  $0 \leq 1 \leq 3 \leq 4$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

**Hérédité.** Supposons qu'il existe un rang  $k \geq 0$  tel que  $\mathcal{P}(k)$  soit vraie, c'est-à-dire

$$0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 4,$$

et montrons que  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire que

$$0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4.$$

La fonction  $f$  étant croissante sur  $[0; +\infty[$ , elle conserve l'ordre :

$$f(0) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(4).$$

Or  $f(0) = \frac{4}{2} = 2$ ,  $f(4) = \frac{24}{6} = 4$ ,  $f(u_k) = u_{k+1}$  et  $f(u_{k+1}) = u_{k+2}$ . On obtient donc

$$2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4,$$

et comme  $0 \leq 2$ , il vient  $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$ . Donc  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie.

**Conclusion.** D'après le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ .

En particulier, la suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par 4.

## 5 Sommes de termes consécutifs

### Exercice 10: Somme de termes d'une suite arithmétique

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme  $u_0 = -3$ .

- a) Calculer la somme  $\sum_{k=6}^{25} u_k = u_6 + u_7 + \dots + u_{25}$ .

- b) On définit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ . Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .

### Correction de l'exercice 10

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = u_0 + 2n = -3 + 2n$ .

- a) La somme comporte  $25 - 6 + 1 = 20$  termes, avec  $u_6 = -3 + 12 = 9$  et  $u_{25} = -3 + 50 = 47$ .

En utilisant

$$\text{somme} = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2},$$

on obtient

$$\sum_{k=6}^{25} u_k = 20 \times \frac{9 + 47}{2} = 20 \times 28 = 560.$$

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la somme  $S_n$  comporte  $n + 1$  termes, de  $u_0 = -3$  à  $u_n = 2n - 3$  :

$$S_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n + 1) \times \frac{-3 + 2n - 3}{2} = (n + 1)(n - 3) = n^2 - 2n - 3.$$

Vérification :  $S_0 = -3$  et  $S_1 = 2 \times (-2) = -4 = -3 + (-1)$ . ✓

### Exercice 11: Somme de termes d'une suite géométrique

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme  $u_0 = 2$ .

a) Calculer la somme  $\sum_{k=4}^{13} u_k = u_4 + u_5 + \dots + u_{13}$ .

b) On définit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ . Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .

### Correction de l'exercice 11

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

a) La somme comporte  $13 - 4 + 1 = 10$  termes et son premier terme est  $u_4 = 2 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$ .

En utilisant

$$\text{somme} = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q},$$

on obtient

$$\sum_{k=4}^{13} u_k = \frac{1}{8} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \times 2 \times \left(1 - \frac{1}{1024}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{1023}{1024} = \frac{1023}{4096} \approx 0,2498.$$

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la somme  $S_n$  comporte  $n + 1$  termes :

$$S_n = u_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 4 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 4 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Vérification :  $S_0 = 4 - 2 = 2$  et  $S_1 = 4 - 1 = 3 = 2 + 1$ . ✓

### Exercice 12: Somme d'une suite « mixte »

Soit  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = -4n + 1 + 2^n$ .

On définit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .  
Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .

### Correction de l'exercice 12

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On sépare la somme en trois sommes connues :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-4k + 1 + 2^k) = -4 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 + \sum_{k=0}^n 2^k.$$

- $\sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  (somme des termes d'une suite arithmétique) ;
- $\sum_{k=0}^n 1 = n + 1$  (il y a  $n + 1$  termes égaux à 1) ;
- $\sum_{k=0}^n 2^k = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1$  (suite géométrique de raison 2).

D'où

$$S_n = -4 \times \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) + 2^{n+1} - 1 = -2n(n+1) + n + 2^{n+1} = -2n^2 - n + 2^{n+1}.$$

*Vérification* :  $u_0 = 2$  et  $S_0 = 0 - 0 + 2 = 2$  ;  $u_1 = -1$  donc  $S_1 = 1$ , et la formule donne  $-2 - 1 + 4 = 1$ . ✓

## 6 Exercices finaux

### Exercice 13: Inégalité de Bernoulli – démonstration au programme

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$  et pour tout réel  $a \geq 0$ ,

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

### Correction de l'exercice 13

Soit  $a$  un réel positif. Pour tout entier naturel  $n$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété : «  $(1 + a)^n \geq 1 + na$  ».

**Initialisation.** Pour  $n = 0$  :  $(1 + a)^0 = 1$  et  $1 + 0 \times a = 1$ . On a bien  $1 \geq 1$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

**Hérédité.** Supposons qu'il existe un rang  $k \geq 0$  tel que  $\mathcal{P}(k)$  soit vraie, c'est-à-dire

$$(1 + a)^k \geq 1 + ka,$$

et montrons que  $\mathcal{P}(k + 1)$  est vraie, c'est-à-dire que

$$(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a.$$

Comme  $a \geq 0$ , on a  $1 + a > 0$  : on peut multiplier les deux membres de l'hypothèse de récurrence par  $1 + a$  sans changer le sens de l'inégalité.

$$(1 + a)(1 + a)^k \geq (1 + a)(1 + ka),$$

soit

$$(1+a)^{k+1} \geq 1 + ka + a + ka^2 = 1 + (k+1)a + ka^2.$$

Or  $k \geq 0$  et  $a^2 \geq 0$ , donc  $ka^2 \geq 0$ , d'où

$$1 + (k+1)a + ka^2 \geq 1 + (k+1)a.$$

Par transitivité,  $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$ . Donc  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie.

**Conclusion.** D'après le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(1+a)^n \geq 1 + na$ .

#### Remarque : Sur l'hypothèse faite sur $a$

La démonstration ci-dessus n'utilise que  $1+a \geq 0$  (multiplier par un réel positif ou nul conserve une inégalité large) : l'inégalité reste donc vraie pour tout réel  $a \geq -1$ . En revanche, elle est **fausse** pour certains réels  $a < -1$  : par exemple, pour  $a = -4$  et  $n = 3$ , on a  $(1+a)^3 = -27$  alors que  $1+3a = -11$ .

### Exercice 14: Monotonie d'une suite

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

### Correction de l'exercice 14

Il s'agit de démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} \leq u_n$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété : «  $u_{n+1} \leq u_n$  ».

**Initialisation.**  $u_0 = 2$  et

$$u_1 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Comme  $1,5 \leq 2$ , on a  $u_1 \leq u_0$  :  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

**Hérédité.** Supposons qu'il existe un rang  $k \geq 0$  tel que  $\mathcal{P}(k)$  soit vraie, c'est-à-dire

$$u_{k+1} \leq u_k,$$

et montrons que  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{k+2} \leq u_{k+1}.$$

En ajoutant 1 aux deux membres de l'hypothèse de récurrence, puis en divisant par  $2 > 0$  (ce qui conserve le sens de l'inégalité) :

$$u_{k+1} + 1 \leq u_k + 1 \quad \text{puis} \quad \frac{u_{k+1} + 1}{2} \leq \frac{u_k + 1}{2},$$

c'est-à-dire  $u_{k+2} \leq u_{k+1}$ . Donc  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie.

**Conclusion.** D'après le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} \leq u_n$  : la suite  $(u_n)$  est **décroissante**.

**Remarque : Pour aller plus loin**

On peut montrer de la même façon, par récurrence, que  $u_n \geq 1$  pour tout  $n$  : la suite est alors décroissante et minorée. On établira plus tard qu'elle converge, et sa limite est 1 (l'unique solution de l'équation  $2x = x + 1$ ).