

Suites et raisonnement par récurrence

Mathématiques – Terminale, enseignement de spécialité

Feuille d'exercices complète

Table des matières

1	Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques	1
2	Activité : découverte du raisonnement par récurrence	2
3	Exercices : raisonnement par récurrence	2
4	Récurrence, dérivation et monotonie	3
5	Sommes de termes consécutifs	4
6	Exercices finaux	4

1 Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques

Exercice 1: Reconnaître la nature d'une suite

Déterminer la nature des suites suivantes (arithmétique, géométrique, ou ni l'une ni l'autre), en précisant le cas échéant le premier terme et la raison. Les égalités sont données pour tout entier naturel n (pour tout entier $n \geq 1$ dans le cas e).

- | | | |
|--|---|---|
| a) $u_n = 0,8n + 3$ | b) $u_n = \frac{3n+1}{5}$ | c) $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$ |
| d) $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{7}u_n \\ u_0 = 5 \end{cases}$ | e) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{1}{3}u_n \\ u_1 = -2 \end{cases}$ | f) $\begin{cases} u_{n+1} - u_n = 4 \\ u_0 = 8 \end{cases}$ |
| g) $\begin{cases} u_{n+1} = n + u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}$ | h) $u_n = \frac{5}{2^n}$ | i) $u_n = \frac{3^{n+1}}{2^n}$ |

Exercice 2: Suite auxiliaire arithmétique

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n) , puis faire une conjecture sur l'expression de son terme général.
- On suppose $u_n \neq 0$ pour tout entier naturel n et on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
- En déduire l'expression de v_n , puis celle de u_n , en fonction de n .

Exercice 3: Suite auxiliaire géométrique

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$$

1. Calculer les 4 premiers termes de cette suite.
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 6$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n en fonction de n .

Exercice 4: Suite auxiliaire géométrique (bis)

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. On définit la suite (v_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4u_n - 8n + 24$.
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b) En déduire l'expression de v_n , puis celle de u_n , en fonction de n .

2 Activité : découverte du raisonnement par récurrence**Activité : Conjecturer puis démontrer**

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \\ u_0 = 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer les termes u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .
3. Démontrer cette conjecture.

3 Exercices : raisonnement par récurrence**Exercice 5: Expression explicite d'une suite**

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -2u_n + 9$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = (-2)^{n+1} + 3.$$

Exercice 6: Conjecturer puis démontrer

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n^2}$.

1. Calculer les premiers termes et conjecturer une formule explicite pour u_n .
2. Démontrer par récurrence votre conjecture.

Exercice 7: Une minoration

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times (0,5)^n \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$u_n \geq \frac{15}{4} \times (0,5)^n.$$

Exercice 8: Sommes et inégalité

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \neq 0$,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 0$,

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2.$$

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$5^n \geq 4^n + 3^n.$$

4 Récurrence, dérivation et monotonie**Exercice 9: D'après BAC 2021, Métropole**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}.$$

1. Montrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{5x + 4}{x + 2}$$

est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

5 Sommes de termes consécutifs

Exercice 10: Somme de termes d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -3$.

a) Calculer la somme $\sum_{k=6}^{25} u_k = u_6 + u_7 + \cdots + u_{25}$.

b) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Exprimer S_n en fonction de n .

Exercice 11: Somme de termes d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 2$.

a) Calculer la somme $\sum_{k=4}^{13} u_k = u_4 + u_5 + \cdots + u_{13}$.

b) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Exprimer S_n en fonction de n .

Exercice 12: Somme d'une suite « mixte »

Soit (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -4n + 1 + 2^n$.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Exprimer S_n en fonction de n .

6 Exercices finaux

Exercice 13: Inégalité de Bernoulli – démonstration au programme

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n et pour tout réel $a \geq 0$,

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Exercice 14: Monotonie d'une suite

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.