

Raisonnement par récurrence

Mathématiques – Terminale, enseignement de spécialité

Feuille d'exercices supplémentaire

Table des matières

1	Démontrer la forme explicite d'une suite	1
2	Majorations et minoration	4
3	Utiliser la croissance d'une fonction	7
4	Pour aller plus loin	10

1 Démontrer la forme explicite d'une suite

Exercice 1: Premier pas

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 2^{n+1} + 1.$$

Correction de l'exercice 1

1.

$$u_1 = 2 \times 3 - 1 = 5, \quad u_2 = 2 \times 5 - 1 = 9, \quad u_3 = 2 \times 9 - 1 = 17.$$

2. Pour tout entier naturel n , notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n = 2^{n+1} + 1$ ».

Initialisation. $u_0 = 3$ et $2^{0+1} + 1 = 2 + 1 = 3$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire

$$u_k = 2^{k+1} + 1,$$

et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{k+1} = 2^{k+2} + 1.$$

On a

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k - 1 && \text{par définition de la suite} \\ &= 2(2^{k+1} + 1) - 1 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 2^{k+2} + 2 - 1 = 2^{k+2} + 1. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 1$.

Exercice 2: Une suite arithmético-géométrique

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Correction de l'exercice 2

Pour tout entier naturel n , notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n = 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ».

Initialisation. $u_0 = 5$ et $6 - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 6 - 1 = 5$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire

$$u_k = 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{k+1} = 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.$$

On a

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{1}{2}u_k + 3 && \text{par définition de la suite} \\ &= \frac{1}{2} \left(6 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) + 3 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 3 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k + 3 = 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 3: Une suite à termes fractionnaires

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 sous forme de fractions irréductibles.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \frac{1}{2n+1}.$$

Correction de l'exercice 3

1.

$$u_1 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}, \quad u_2 = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5}, \quad u_3 = \frac{\frac{1}{5}}{1+\frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{1}{7}.$$

2. Pour tout entier naturel n , notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n = \frac{1}{2n+1}$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$ et $\frac{1}{2 \times 0 + 1} = 1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire

$$u_k = \frac{1}{2k+1},$$

et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{k+1} = \frac{1}{2k+3},$$

puisque $2(k+1) + 1 = 2k + 3$. On a

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{u_k}{1+2u_k} && \text{par définition de la suite} \\ &= \frac{\frac{1}{2k+1}}{1+\frac{2}{2k+1}} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{\frac{1}{2k+1}}{\frac{2k+1+2}{2k+1}} = \frac{1}{2k+1} \times \frac{2k+1}{2k+3} = \frac{1}{2k+3}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2n+1}$.

Exercice 4: Une forme explicite mixte

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 2^{n+1} - n - 1.$$

Correction de l'exercice 4

1.

$$u_1 = 2 \times 1 + 0 = 2, \quad u_2 = 2 \times 2 + 1 = 5, \quad u_3 = 2 \times 5 + 2 = 12.$$

2. Pour tout entier naturel n , notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n = 2^{n+1} - n - 1$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$ et $2^1 - 0 - 1 = 2 - 1 = 1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire

$$u_k = 2^{k+1} - k - 1,$$

et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{k+1} = 2^{k+2} - (k+1) - 1 = 2^{k+2} - k - 2.$$

On a

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k + k && \text{par définition de la suite} \\ &= 2(2^{k+1} - k - 1) + k && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 2^{k+2} - 2k - 2 + k = 2^{k+2} - k - 2. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} - n - 1$.

Vérification : $u_2 = 2^3 - 2 - 1 = 5 \checkmark$, $u_3 = 2^4 - 3 - 1 = 12 \checkmark$

2 Majorations et minoration

Exercice 5: Une majoration

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq u_n \leq 6.$$

Correction de l'exercice 5

1.

$$u_1 = \frac{1}{2} \times 0 + 3 = 3, \quad u_2 = \frac{1}{2} \times 3 + 3 = \frac{9}{2} = 4,5.$$

2. Pour tout entier naturel n , notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $0 \leq u_n \leq 6$ ».

Initialisation. $u_0 = 0$ et $0 \leq 0 \leq 6$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire

$$0 \leq u_k \leq 6,$$

et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$0 \leq u_{k+1} \leq 6.$$

Comme $\frac{1}{2} > 0$, on peut multiplier l'encadrement de l'hypothèse de récurrence par $\frac{1}{2}$

sans en changer le sens, puis ajouter 3 à chaque membre :

$$0 \leq \frac{1}{2}u_k \leq 3 \quad \text{puis} \quad 3 \leq \underbrace{\frac{1}{2}u_k + 3}_{= u_{k+1}} \leq 6.$$

Or $0 \leq 3$, donc par transitivité $0 \leq u_{k+1} \leq 6$. Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 6$.

En particulier, la suite (u_n) est majorée par 6 et minorée par 0.

Exercice 6: Une minoration par une suite géométrique

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n \geq 3^n.$$

Correction de l'exercice 6

Pour tout entier naturel n , notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geq 3^n$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$ et $3^0 = 1$. Comme $1 \geq 1$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire

$$u_k \geq 3^k,$$

et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{k+1} \geq 3^{k+1}.$$

Comme $3 > 0$, on peut multiplier l'hypothèse de récurrence par 3 sans en changer le sens, puis ajouter k aux deux membres :

$$u_{k+1} = 3u_k + k \geq 3 \times 3^k + k = 3^{k+1} + k.$$

Or $k \geq 0$, donc $3^{k+1} + k \geq 3^{k+1}$. Par transitivité,

$$u_{k+1} \geq 3^{k+1}.$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 3^n$.

Exercice 7: Une inégalité à partir d'un certain rang

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 4$,

$$2^n \geq n^2.$$

Correction de l'exercice 7

Pour tout entier $n \geq 4$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $2^n \geq n^2$ ».

Initialisation. Pour $n = 4$: $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$. Comme $16 \geq 16$, $\mathcal{P}(4)$ est vraie.

Hérédité. Supposons qu'il existe un rang $k \geq 4$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire

$$2^k \geq k^2,$$

et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$2^{k+1} \geq (k+1)^2.$$

Comme $2 > 0$, on peut multiplier l'hypothèse de récurrence par 2 sans en changer le sens :

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k \geq 2k^2.$$

Il reste à comparer $2k^2$ et $(k+1)^2$. On calcule la différence :

$$2k^2 - (k+1)^2 = 2k^2 - k^2 - 2k - 1 = k^2 - 2k - 1 = (k-1)^2 - 2.$$

Or $k \geq 4$, donc $(k-1)^2 \geq 9 > 2$: la différence est strictement positive, d'où $2k^2 \geq (k+1)^2$. Par transitivité,

$$2^{k+1} \geq (k+1)^2.$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

Remarque : Pourquoi commencer à $n = 4$?

L'inégalité est vraie pour $n = 0$ ($1 \geq 0$), $n = 1$ ($2 \geq 1$) et $n = 2$ ($4 \geq 4$), mais **fausse** pour $n = 3$: $2^3 = 8$ alors que $3^2 = 9$. On ne peut donc pas démarrer la récurrence au rang 0 : l'hérédité serait mise en défaut au passage de 2 à 3.

Exercice 8: Un encadrement

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer la valeur exacte de u_1 , puis une valeur approchée de u_2 à 10^{-2} près.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$1 \leq u_n \leq 4.$$

Correction de l'exercice 8

1. $u_1 = \sqrt{3 \times 1 + 4} = \sqrt{7}$, puis $u_2 = \sqrt{3\sqrt{7} + 4} \approx 3,46$.

2. Pour tout entier naturel n , notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $1 \leq u_n \leq 4$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$ et $1 \leq 1 \leq 4$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire

$$1 \leq u_k \leq 4,$$

et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$1 \leq u_{k+1} \leq 4.$$

On multiplie l'encadrement par $3 > 0$, puis on ajoute 4 à chaque membre :

$$3 \leq 3u_k \leq 12 \quad \text{puis} \quad 7 \leq 3u_k + 4 \leq 16.$$

La fonction racine carrée étant croissante sur $[0; +\infty[$, elle conserve l'ordre :

$$\sqrt{7} \leq \underbrace{\sqrt{3u_k + 4}}_{= u_{k+1}} \leq \sqrt{16} = 4.$$

Or $\sqrt{7} \geq \sqrt{1} = 1$, donc par transitivité $1 \leq u_{k+1} \leq 4$. Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 4$.

3 Utiliser la croissance d'une fonction

Exercice 9: Une suite homographique

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{u_n + 2}.$$

1. Montrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{4x + 3}{x + 2}$$

est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3.$$

3. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?

Correction de l'exercice 9

1. La fonction f est une fonction rationnelle, dérivable sur $[0; +\infty[$ car $x + 2 \neq 0$ sur cet intervalle. En posant $u(x) = 4x + 3$ et $v(x) = x + 2$, on a $u'(x) = 4$ et $v'(x) = 1$, donc, pour tout $x \in [0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{4(x+2) - (4x+3) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{4x+8-4x-3}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}.$$

Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $(x+2)^2 > 0$ et $5 > 0$, donc $f'(x) > 0$: la fonction f est **strictement croissante** sur $[0; +\infty[$.

2. On remarque d'abord que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
Pour tout entier naturel n , notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ ».

Initialisation. $u_0 = 0$ et

$$u_1 = \frac{4 \times 0 + 3}{0 + 2} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

On a bien $0 \leq 0 \leq 1,5 \leq 3$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire

$$0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 3,$$

et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 3.$$

La fonction f étant croissante sur $[0; +\infty[$, elle conserve l'ordre :

$$f(0) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(3).$$

Or $f(0) = \frac{3}{2}$, $f(3) = \frac{15}{5} = 3$, $f(u_k) = u_{k+1}$ et $f(u_{k+1}) = u_{k+2}$. On obtient donc

$$\frac{3}{2} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 3,$$

et comme $0 \leq \frac{3}{2}$, il vient $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 3$. Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

3. De $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n , on déduit que la suite (u_n) est **croissante**; de $u_n \leq 3$, qu'elle est **majorée par 3**.

Exercice 10: Une suite définie par une racine carrée

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}.$$

1. Montrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
2. Calculer $f(0)$ et $f(3)$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3.$$

Correction de l'exercice 10

1. Pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a $2x + 3 \geq 3 > 0$: la fonction f est dérivable sur cet intervalle et

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}.$$

Comme $\sqrt{2x+3} > 0$, on a $f'(x) > 0$: la fonction f est **strictement croissante** sur $[0; +\infty[$.

2. $f(0) = \sqrt{3}$ et $f(3) = \sqrt{9} = 3$.
3. On remarque d'abord que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

Pour tout entier naturel n , notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ ».

Initialisation. $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{3} \approx 1,73$. On a bien $0 \leq 0 \leq \sqrt{3} \leq 3$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire

$$0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 3,$$

et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 3.$$

La fonction f étant croissante sur $[0; +\infty[$, elle conserve l'ordre :

$$f(0) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(3),$$

c'est-à-dire, d'après la question 2. et puisque $f(u_k) = u_{k+1}$ et $f(u_{k+1}) = u_{k+2}$,

$$\sqrt{3} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 3.$$

Comme $0 \leq \sqrt{3}$, il vient $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 3$. Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 3.

Exercice 11: Une suite décroissante

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n}{u_n + 2}.$$

1. Montrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{6x}{x+2}$$

est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$4 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6.$$

3. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?

Correction de l'exercice 11

1. La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ car $x+2 \neq 0$ sur cet intervalle. En posant $u(x) = 6x$ et $v(x) = x+2$, on a $u'(x) = 6$ et $v'(x) = 1$, donc, pour tout $x \in [0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{6(x+2) - 6x \times 1}{(x+2)^2} = \frac{12}{(x+2)^2}.$$

Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $(x+2)^2 > 0$ et $12 > 0$, donc $f'(x) > 0$: la fonction f est **strictement croissante** sur $[0; +\infty[$.

2. On remarque d'abord que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

Pour tout entier naturel n , notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $4 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$ ».

Initialisation. $u_0 = 6$ et

$$u_1 = \frac{6 \times 6}{6 + 2} = \frac{36}{8} = 4,5.$$

On a bien $4 \leq 4,5 \leq 6 \leq 6$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire

$$4 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 6,$$

et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$4 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 6.$$

La fonction f étant croissante sur $[0; +\infty[$, elle conserve l'ordre :

$$f(4) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k) \leq f(6).$$

Or $f(4) = \frac{24}{6} = 4$, $f(6) = \frac{36}{8} = 4,5$, $f(u_{k+1}) = u_{k+2}$ et $f(u_k) = u_{k+1}$. On obtient donc

$$4 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 4,5,$$

et comme $4,5 \leq 6$, il vient $4 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 6$. Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$.

3. De $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n , on déduit que la suite (u_n) est **décroissante** ; de $u_n \geq 4$, qu'elle est **minorée par 4**.

Remarque : Attention : f croissante, suite décroissante

Il ne faut pas confondre le sens de variation de la **fonction** f et celui de la **suite** (u_n) . Ici f est croissante, et c'est précisément ce qui fait fonctionner l'hérédité : une fonction croissante conserve l'ordre, donc de $u_{k+1} \leq u_k$ on déduit $f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$, c'est-à-dire $u_{k+2} \leq u_{k+1}$. C'est l'initialisation, ici $u_1 \leq u_0$, qui décide du sens de variation de la suite : avec $u_0 = 2$ on aurait obtenu $u_1 = 3 \geq u_0$ et la suite aurait été croissante.

Si la fonction f était **décroissante**, elle inverserait l'ordre à chaque étape et ce raisonnement ne marcherait plus : de $u_{k+1} \leq u_k$ on tirerait $u_{k+2} \geq u_{k+1}$. La suite est alors « en zigzag » et on étudie séparément les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) , en travaillant avec $f \circ f$, qui est croissante. Ce n'est pas au programme de terminale.

Remarque : Comment trouver l'encadrement à démontrer ?

Les bornes 4 et 6 ne sortent pas de nulle part : 6 est le premier terme, et 4 est la solution non nulle de l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire la limite éventuelle de la suite. Calculer quelques termes à la calculatrice permet d'anticiper le sens de variation avant de se lancer dans la récurrence.

4 Pour aller plus loin

Exercice 12: Deux sommes classiques

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Correction de l'exercice 12

1. Pour tout entier $n \geq 1$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

Initialisation. Pour $n = 1$: le membre de gauche vaut 1 et $\frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons qu'il existe un rang $k \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire

$$1^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$1^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

On a

$$\begin{aligned} \underbrace{1^2 + \cdots + k^2}_{\text{hypothèse de récurrence}} + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}, \end{aligned}$$

la dernière égalité venant de $(k+2)(2k+3) = 2k^2 + 3k + 4k + 6 = 2k^2 + 7k + 6$. Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 1$, $1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $\frac{1}{1 \times 2} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ ».

Initialisation. Pour $n = 1$: le membre de gauche vaut $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons qu'il existe un rang $k \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire

$$\frac{1}{1 \times 2} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1},$$

et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{1 \times 2} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

On a

$$\underbrace{\frac{1}{1 \times 2} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}}_{\text{hypothèse de récurrence}} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k(k+2) + 1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{1 \times 2} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Exercice 13: Récurrence et hérédité : un contre-exemple

Pour tout entier naturel n , on considère la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $3^n \geq 4n + 5$ ».

1. Démontrer que la propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire à partir du rang 1, c'est-à-dire que pour tout entier $k \geq 1$, si $\mathcal{P}(k)$ est vraie alors $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
2. La propriété $\mathcal{P}(1)$ est-elle vraie ? Et $\mathcal{P}(2)$?
3. Déterminer le plus petit entier n_0 à partir duquel on peut conclure que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$, et rédiger la conclusion.

Correction de l'exercice 13

1. Soit $k \geq 1$ un entier tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire

$$3^k \geq 4k + 5.$$

Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $3^{k+1} \geq 4(k+1) + 5 = 4k + 9$.

Comme $3 > 0$, on peut multiplier l'hypothèse par 3 sans en changer le sens :

$$3^{k+1} = 3 \times 3^k \geq 3(4k + 5) = 12k + 15.$$

Or

$$(12k + 15) - (4k + 9) = 8k + 6 > 0 \quad \text{car } k \geq 1,$$

donc $12k + 15 \geq 4k + 9$. Par transitivité, $3^{k+1} \geq 4k + 9$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

La propriété est donc bien **héréditaire** à partir du rang 1.

2. Pour $n = 1$: $3^1 = 3$ et $4 \times 1 + 5 = 9$. Comme $3 < 9$, $\mathcal{P}(1)$ est **fausse**.
Pour $n = 2$: $3^2 = 9$ et $4 \times 2 + 5 = 13$. Comme $9 < 13$, $\mathcal{P}(2)$ est **fausse**.
3. Pour $n = 3$: $3^3 = 27$ et $4 \times 3 + 5 = 17$. Comme $27 \geq 17$, $\mathcal{P}(3)$ est **vraie** : on prend $n_0 = 3$.

Conclusion. $\mathcal{P}(3)$ est vraie (initialisation) et $\mathcal{P}$ est héréditaire à partir du rang 1, donc en particulier à partir du rang 3. D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 3$, $3^n \geq 4n + 5$.

Remarque : Ce qu'il faut retenir

L'hérédité **seule** ne démontre rien : ici la propriété est héréditaire dès le rang 1, et pourtant elle est fausse aux rangs 1 et 2. L'initialisation est ce qui « amorce » la chaîne : sans elle, la récurrence ne prouve rien du tout.