

Raisonnement par récurrence

Mathématiques – Terminale, enseignement de spécialité

Feuille d'exercices supplémentaire

Table des matières

1	Démontrer la forme explicite d'une suite	1
2	Majorations et minoration	2
3	Utiliser la croissance d'une fonction	3
4	Pour aller plus loin	4

1 Démontrer la forme explicite d'une suite

Exercice 1: Premier pas

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 2^{n+1} + 1.$$

Exercice 2: Une suite arithmético-géométrique

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Exercice 3: Une suite à termes fractionnaires

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 sous forme de fractions irréductibles.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \frac{1}{2n+1}.$$

Exercice 4: Une forme explicite mixte

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 2^{n+1} - n - 1.$$

2 Majorations et minoration

Exercice 5: Une majoration

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq u_n \leq 6.$$

Exercice 6: Une minoration par une suite géométrique

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n \geq 3^n.$$

Exercice 7: Une inégalité à partir d'un certain rang

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 4$,

$$2^n \geq n^2.$$

Exercice 8: Un encadrement

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer la valeur exacte de u_1 , puis une valeur approchée de u_2 à 10^{-2} près.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$1 \leq u_n \leq 4.$$

3 Utiliser la croissance d'une fonction**Exercice 9: Une suite homographique**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{u_n + 2}.$$

1. Montrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{4x + 3}{x + 2}$$

est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3.$$

3. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?

Exercice 10: Une suite définie par une racine carrée

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}.$$

1. Montrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
2. Calculer $f(0)$ et $f(3)$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3.$$

Exercice 11: Une suite décroissante

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n}{u_n + 2}.$$

1. Montrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{6x}{x+2}$$

est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$4 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6.$$

3. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?

4 Pour aller plus loin

Exercice 12: Deux sommes classiques

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 13: Récurrence et hérédité : un contre-exemple

Pour tout entier naturel n , on considère la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $3^n \geq 4n + 5$ ».

1. Démontrer que la propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire à partir du rang 1, c'est-à-dire que pour tout entier $k \geq 1$, si $\mathcal{P}(k)$ est vraie alors $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
2. La propriété $\mathcal{P}(1)$ est-elle vraie ? Et $\mathcal{P}(2)$?
3. Déterminer le plus petit entier n_0 à partir duquel on peut conclure que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$, et rédiger la conclusion.