# Fiche de cours – Le raisonnement par récurrence

Mathématiques – Terminale, enseignement de spécialité

L'essentiel à connaître

## 1 Le principe

**Théorème 1.1: Principe du raisonnement par récurrence**

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel $n$, et $n_0$ un entier naturel. Si :
- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie *(initialisation : le premier domino tombe)* ;
- pour tout $k \geq n_0$, $\mathcal{P}(k)$ vraie $\implies$ $\mathcal{P}(k+1)$ vraie *(hérédité : chaque domino fait tomber le suivant)* ;

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie **pour tout entier** $n \geq n_0$.

**Remarque : Quand l'utiliser ?**

Quand le rang $n+1$ s'exprime naturellement à partir du rang $n$ : suites définies par récurrence (expression explicite, monotonie, majoration, encadrement), sommes, inégalités dépendant de $n$, divisibilité…

## 2 La rédaction, en quatre temps

**Méthode 2.1: Squelette de rédaction à connaître par cœur**

1. **Énoncé.** « Pour tout entier $n \geq n_0$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : … »
2. **Initialisation.** « Pour $n = n_0$ : d'une part …, d'autre part … Donc $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie. » *(calculer les deux membres séparément)*
3. **Hérédité.** « Supposons qu'il existe un rang $k \geq n_0$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire … *(hypothèse de récurrence)*, et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire … »
   Puis le calcul, en **partant de ce que l'on sait** pour **arriver à ce qu'il faut prouver**, en signalant où l'on utilise l'hypothèse de récurrence. Terminer par : « Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. »
4. **Conclusion.** « D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq n_0$, … »

**Remarque : Erreurs fréquentes**

- Écrire « supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie **pour tout** $n$ » : c'est supposer ce que l'on veut démontrer. On fixe **un** rang $k$.
- Partir de ce qu'il faut démontrer au rang $k+1$ pour aboutir à quelque chose de vrai.
- Oublier l'**initialisation** : une propriété peut être héréditaire et toujours fausse. *Exemple :* « $2^n$ est divisible par 3 » est héréditaire ($2^{k+1} = 2 \times 3p = 3 \times 2p$), mais $2^0 = 1$ n'est pas divisible par 3, et la propriété n'est vraie pour aucun $n$.

## 3 Les situations types et la clé de l'hérédité

**Méthode 3.1: Démontrer une expression explicite**

**Clé :** partir de $u_{k+1}$, utiliser la **relation de récurrence**, puis l'**hypothèse de récurrence**, et transformer jusqu'à l'expression voulue.
*Exemple :* $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ ; montrer que $u_n = (n+1)^2$.

$$u_{k+1} = u_k + 2k + 3 = (k+1)^2 + 2k + 3 = k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2.$$

**Méthode 3.2: Démontrer une monotonie ou une inégalité**

**Clé :** partir de l'inégalité supposée au rang $k$ et lui appliquer, **étape par étape**, les opérations qui construisent $u_{k+1}$ :
— multiplier par un réel **strictement positif** conserve l'ordre ; par un réel **négatif**, il change ;
— ajouter un même réel aux deux membres conserve l'ordre ;
— si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f$ **croissante**, appliquer $f$ conserve l'ordre.
*Exemple :* $u_0 = 2$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ ; montrer que $(u_n)$ est croissante, c'est-à-dire $\mathcal{P}(n)$ : « $u_{n+1} \geq u_n$ ».

$$u_{k+1} \geq u_k \implies \tfrac{1}{3}u_{k+1} \geq \tfrac{1}{3}u_k \implies \tfrac{1}{3}u_{k+1} + 2 \geq \tfrac{1}{3}u_k + 2 \implies u_{k+2} \geq u_{k+1}.$$

*Pour une majoration* ($u_n \leq 3$) ou un encadrement ($0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$), même démarche.

**Méthode 3.3: Démontrer une divisibilité**

**Clé :** traduire l'hypothèse de récurrence par une égalité avec un entier ($4^k - 1 = 3p$), puis faire apparaître cette quantité au rang $k+1$.
*Exemple :* $4^{k+1} - 1 = 4 \times 4^k - 1 = 4(4^k - 1) + 3 = 4 \times 3p + 3 = 3(4p+1)$, et $4p+1$ est un entier.

## 4 L'inégalité de Bernoulli

**Théorème 4.1: Inégalité de Bernoulli (démonstration exigible)**

Pour tout réel $a \geq 0$ et tout entier naturel $n$ : $\quad (1+a)^n \geq 1 + na$.
*Utilité :* pour $q > 1$, on pose $q = 1 + a$ $(a > 0)$ ; alors $q^n \geq 1 + na$, qui tend vers $+\infty$ : par comparaison, $q^n \to +\infty$.

*Idée clé de l'hérédité.* On suppose $(1+a)^k \geq 1 + ka$. Comme $1 + a > 0$, on peut multiplier par $1 + a$ sans changer le sens :

$$(1+a)^{k+1} \geq (1+a)(1+ka) = 1 + (k+1)a + \underbrace{ka^2}_{\geq 0} \geq 1 + (k+1)a.$$

□

**Bilan**

— **Quatre temps** : énoncé de $\mathcal{P}(n)$, initialisation, hérédité, conclusion.
— **Initialisation** : indispensable ; calculer les deux membres séparément.
— **Hérédité** : à $k$ **fixé** ; écrire ce que l'on suppose et ce que l'on veut ; partir du connu ; citer l'hypothèse de récurrence.
— **Inégalités** : attention au signe du nombre par lequel on multiplie.
— **Bernoulli** : $(1+a)^n \geq 1 + na$ pour $a \geq 0$ *(démonstration exigible).*