

Formulaire : suites arithmétiques et géométriques

Mathématiques – Terminale, enseignement de spécialité

Fiche récapitulative

1 Suites arithmétiques

Définition 1.1: Suite arithmétique

Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On appelle alors r la **raison** de la suite.

Propriété 1.2: Terme général

Pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 + nr.$$

Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p : $u_n = u_p + (n - p)r$.

Propriété 1.3: Somme des premiers termes

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Alors

$$S_n = \frac{(n+1) \times (u_0 + u_n)}{2}.$$

Plus généralement, pour $q \geq p \geq 0$:

$$u_p + \dots + u_q = \frac{(q - p + 1) \times (u_p + u_q)}{2}.$$

Remarque : Formule à retenir

$$u_p + \dots + u_q = \frac{(\text{nb de termes}) \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}.$$

Attention au nombre de termes : de u_p à u_q , il y en a $q - p + 1$ (et non $q - p$).

Propriété 1.4: Sens de variation

Une suite arithmétique de raison r est :

- **croissante** si $r > 0$;
- **constante** si $r = 0$;
- **décroissante** si $r < 0$.

2 Suites géométriques

On passe d'un terme au suivant en **multipliant** par un nombre fixe (au lieu d'ajouter).

Définition 2.1: Suite géométrique

Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On appelle alors q la **raison** de la suite.

Propriété 2.2: Terme général

Pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Propriété 2.3: Somme des premiers termes

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

— Si $q \neq 1$:

$$S_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1 - q} \quad \text{c'est-à-dire} \quad S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

— Si $q = 1$: tous les termes sont égaux à u_0 , donc $S_n = (n + 1) u_0$.

Plus généralement, pour $m \geq n \geq 0$ et $q \neq 1$:

$$u_n + \dots + u_m = \frac{u_n - u_{m+1}}{1 - q}.$$

Remarque : Formule à retenir

$$u_n + \dots + u_m = \frac{\text{premier terme} - \text{terme qui suit le dernier}}{1 - \text{raison}}.$$

Propriété 2.4: Comportement à l'infini

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 > 0$. La suite :

- tend vers $+\infty$ si $q > 1$;
- est constante si $q = 1$;
- tend vers 0 si $|q| < 1$;
- n'a pas de limite si $q \leq -1$.

Si $u_0 < 0$, les résultats sont symétriques : pour $q > 1$ la suite tend vers $-\infty$, et pour $|q| < 1$ elle tend toujours vers 0.

Tableau récapitulatif

Attention : pour reconnaître la nature d'une suite, ces calculs doivent être menés *avec n quelconque*, et non seulement sur les premiers termes.

	Arithmétique	Géométrique
Relation de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Reconnaître	$u_{n+1} - u_n = r$ constante	$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ constant
Terme général	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 \times q^n$
Somme $u_0 + \dots + u_n$	$\frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$	$u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$