

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Mathématiques – Terminale – Enseignement de spécialité

Géométrie dans l'espace

Table des matières

1	Vecteurs de l'espace	1
1.1	Notion de vecteur dans l'espace	1
1.2	Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace	2
2	Droites et plans de l'espace	4
2.1	Direction d'une droite de l'espace	4
2.2	Direction d'un plan de l'espace	4
3	Positions relatives de droites et de plans de l'espace	6
3.1	Positions relatives de deux droites	6
3.2	Positions relatives de deux plans	7
3.3	Positions relatives d'une droite et d'un plan	7
4	Bases et repères de l'espace	8
4.1	Vecteurs coplanaires et bases de l'espace	8
4.2	Repère de l'espace	10
5	Coplanarité de trois vecteurs et résolution de système	13
5.1	Traduction en système	13
5.2	Première méthode de résolution : la substitution	14
5.3	Seconde méthode de résolution : la combinaison	15
5.4	Le cas où le système n'a pas de solution	18
5.5	La démarche complète	19
6	Bilan	19

1 Vecteurs de l'espace

1.1 Notion de vecteur dans l'espace

Définition 1.1: Vecteur de l'espace

Un **vecteur de l'espace** est défini par une **direction** de l'espace, un **sens** et une **norme** (longueur).

Propriété 1.2: Translation

Dire que le point M' est l'image du point M par la translation de vecteur $\vec{u}$ revient à dire que :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$

Remarque : Ce qui ne change pas par rapport au plan

— Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : somme, produit par un réel, relation de Chasles, colinéarité, ...

— Les translations gardent les mêmes propriétés qu'en géométrie plane : conservation du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu, ...

1.2 Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace

Définition 1.3: Combinaison linéaire

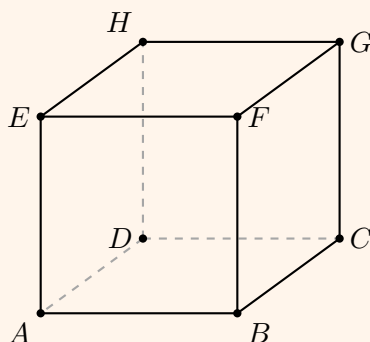
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

Tout vecteur de la forme $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$, avec a , b et c réels, est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Méthode 1.4: Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés

À l'aide du cube ci-contre, représenter les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ donnés par :

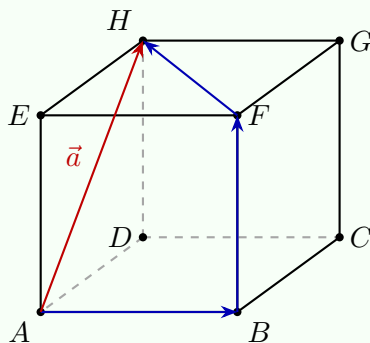
$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}, \quad \vec{b} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}, \quad \vec{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}.$$



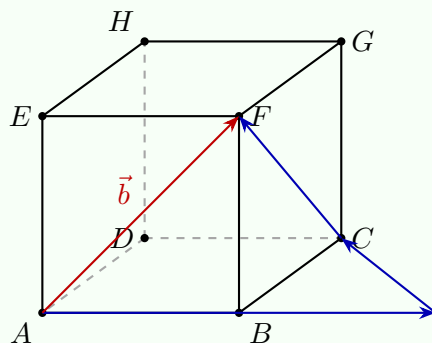
Correction

On construit à chaque fois un **chemin** d'origine A, formé de représentants successifs des vecteurs de la somme : l'extrémité du chemin donne l'extrémité du vecteur cherché.

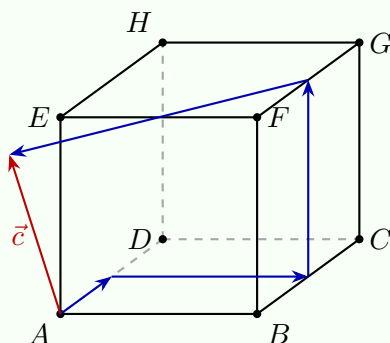
- $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}$: on enchaîne $\overrightarrow{AB}$, puis $\overrightarrow{CG}$ (soit $\overrightarrow{BF}$), puis $\overrightarrow{FH}$. On obtient $\vec{a} = \overrightarrow{AH}$.



- $\vec{b} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$: on enchaîne $2\overrightarrow{AB}$, puis $\overrightarrow{BD}$, puis $-\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{CF}$. On obtient $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$.



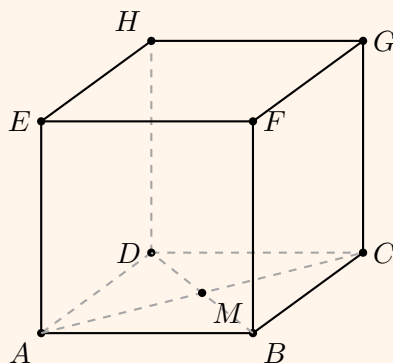
- $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{EF} + \vec{BF} - \vec{AC}$: on enchaîne $\frac{1}{2}\vec{AD}$, puis $\vec{EF}$, puis $\vec{BF}$, puis $-\vec{AC} = \vec{CA}$. Le vecteur obtenu vaut $\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{AE}$: son extrémité sort du cube.



Méthode 1.5: Exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs

Dans le parallélépipède ci-dessous, M est le centre du rectangle $ABCD$.

Exprimer les vecteurs $\vec{CE}$, $\vec{MG}$ et $\vec{MF}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{AM}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AE}$.



Correction

On construit à chaque fois un chemin reliant l'origine à l'extrémité du vecteur, à l'aide des vecteurs $\vec{AM}$, $\vec{AB}$, $\vec{AE}$ ou de vecteurs qui leur sont colinéaires.

$$\vec{CE} = \vec{CA} + \vec{AE} = -2\vec{AM} + \vec{AE},$$

$$\vec{MG} = \vec{MC} + \vec{CG} = \vec{AM} + \vec{AE},$$

$$\vec{MF} = \vec{MA} + \vec{AB} + \vec{BF} = -\vec{AM} + \vec{AB} + \vec{AE}.$$

On a utilisé que M est le centre de $ABCD$, donc $\vec{CA} = -2\vec{AM}$ et $\vec{MC} = \vec{AM}$.

2 Droites et plans de l'espace

2.1 Direction d'une droite de l'espace

Définition 2.1: Vecteur directeur

On appelle **vecteur directeur** de la droite d tout vecteur non nul qui possède la même direction que la droite d .

Propriété 2.2: Appartenance à une droite

Soit une droite d passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Un point M appartient à la droite d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

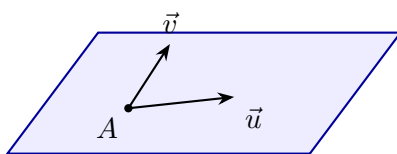
Propriété 2.3: Droites parallèles

Deux droites de l'espace de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2.2 Direction d'un plan de l'espace

Propriété 2.4: Direction d'un plan

Deux vecteurs non nuls et non colinéaires déterminent la direction d'un plan.



Propriété 2.5: Appartenance à un plan

Soit un plan P passant par un point A et dirigé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires. Un point M appartient au plan P si et seulement s'il existe deux réels x et y tels que

$$\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}.$$

Démonstration. — Soit deux points B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan (ABC) . Dans ce repère, tout point M de coordonnées $(x; y)$ est tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

— Réciproquement, soit M un point de l'espace pour lequel il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Soit N le point du plan (ABC) de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$. Alors $\overrightarrow{AN} = x\vec{u} + y\vec{v}$, et donc $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$.

M et N sont confondus, donc M appartient à (ABC) .

□

Remarque

Un plan est donc totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.

Propriété 2.6: Plans parallèles

Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Démonstration. Soit deux plans P et P' de repères respectifs $(A; \vec{u}, \vec{v})$ et $(B; \vec{u}, \vec{v})$.

- Si P et P' sont confondus, la démonstration est triviale.
- Dans la suite, P et P' ne sont pas confondus.

Supposons que P et P' possèdent un point M en commun.

Alors dans P : $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$, où $(x; y)$ sont les coordonnées de M dans P .

Et dans P' : $\overrightarrow{BM} = x'\vec{u} + y'\vec{v}$, où $(x'; y')$ sont les coordonnées de M dans P' .

Donc $\overrightarrow{AB} = (x - x')\vec{u} + (y - y')\vec{v}$, donc B appartient à P .

Donc le repère $(B; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère de P , et donc P et P' sont confondus, ce qui est contraire à l'hypothèse de départ.

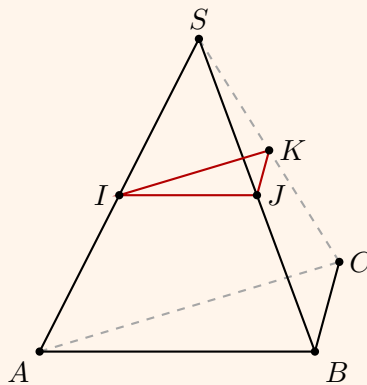
P et P' n'ont aucun point en commun et sont donc parallèles. □

Propriété 2.7: Conséquence

Pour démontrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer que deux vecteurs non colinéaires de l'un des plans sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l'autre.

Méthode 2.8: Démontrer que deux plans sont parallèles

$SABC$ est une pyramide. I , J et K sont les milieux respectifs de $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$. Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

**Correction**

Deux plans sont parallèles si deux vecteurs non colinéaires de l'un sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l'autre.

- Démontrons que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{SJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

- Dans le triangle SBC , on démontre de même que $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
- Deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) , $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$, sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) , $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$: les plans (IJK) et (ABC) sont donc parallèles.

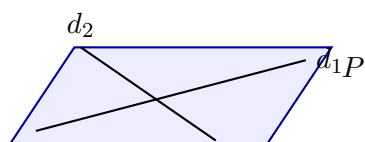
3 Positions relatives de droites et de plans de l'espace

3.1 Positions relatives de deux droites

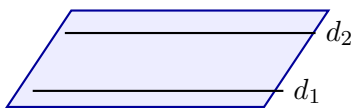
Propriété 3.1

Deux droites de l'espace sont soit **coplanaires** (situées dans un même plan), soit **non coplanaires**.

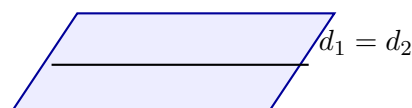
d_1 et d_2 sont coplanaires



d_1 et d_2 sont
sécantes

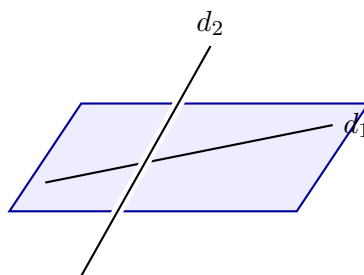


d_1 et d_2 sont
strictement parallèles



d_1 et d_2 sont
confondues

d_1 et d_2 sont non coplanaires

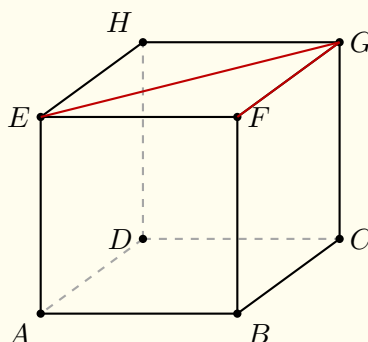


d_1 et d_2 ne sont contenues dans aucun plan commun

Exemple 3.2: Dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube.

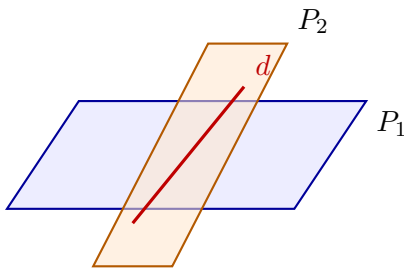
- Les droites (EG) et (FG) appartiennent au même plan (EFG) et sont sécantes en G .
- Les droites (AD) et (FG) appartiennent au même plan (ADG) et sont parallèles.
- Les droites (AD) et (CG) sont non coplanaires.



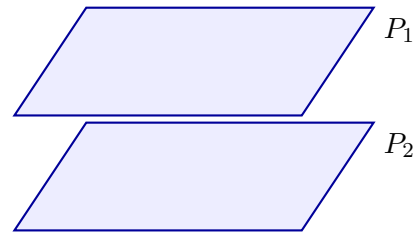
3.2 Positions relatives de deux plans

Propriété 3.3

Deux plans de l'espace sont soit **sécants**, soit **parallèles**.



P_1 et P_2 sont **sécants** suivant la droite d

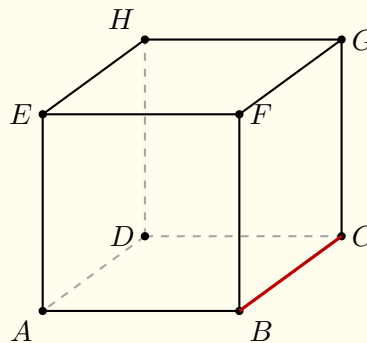


P_1 et P_2 sont **strictement parallèles**
(ou **confondus** s'ils ont un point commun)

Exemple 3.4: Dans un parallélépipède rectangle

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.

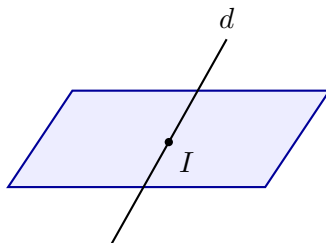
- Les plans (BCG) et (BCE) sont sécants suivant la droite (BC) .
- Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles.



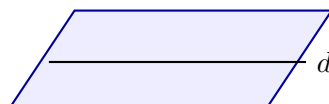
3.3 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriété 3.5

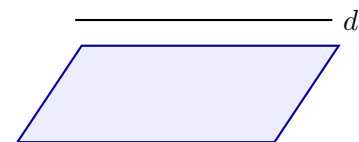
Une droite et un plan de l'espace sont soit **sécants**, soit **parallèles**.



d et P sont **sécants**
en un point I



d est **incluse** dans P



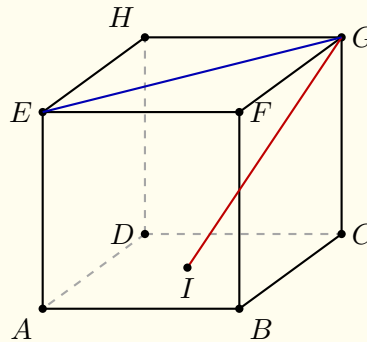
d et P sont
strictement parallèles

Exemple 3.6: Dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube et I est un point de la face $ABCD$.

- La droite (GI) et le plan (ABC) sont sécants en I .

- La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG) .
- La droite (EG) et le plan (ABC) sont parallèles.

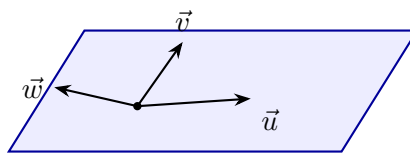


4 Bases et repères de l'espace

4.1 Vecteurs coplanaires et bases de l'espace

Définition 4.1: Vecteurs coplanaires

Trois vecteurs sont **coplanaires** s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.



Propriété 4.2: Caractérisation de la coplanarité

Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs **non colinéaires**. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe un couple de réels $(x; y)$ tel que

$$\vec{u} = x \vec{v} + y \vec{w}.$$

Théorème 4.3: Décomposition suivant trois vecteurs non coplanaires

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tel que

$$\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}.$$

Démonstration. Existence. Soit $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\vec{u}$ et soit P le plan de repère $(A; \vec{i}; \vec{j})$.

Si B appartient à P , alors $\overrightarrow{AB}$ se décompose suivant les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Supposons que B n'appartienne pas à P . Soit d la droite passant par B de vecteur directeur $\vec{k}$. Comme $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires, $\vec{k}$ ne dirige aucune droite du plan P : la droite d n'est pas parallèle à P et coupe le plan P en un point C .

On peut écrire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{AC}$ appartient au plan P , donc il existe un couple $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{AC} = x \vec{i} + y \vec{j}$.

$\overrightarrow{CB}$ est colinéaire à $\vec{k}$, donc il existe un réel z tel que $\overrightarrow{CB} = z \vec{k}$.

Il existe donc un triplet $(x; y; z)$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Unicité. Supposons que l'on ait deux écritures distinctes :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}.$$

Alors $(x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$.

Supposons que l'une au moins des trois différences ne soit pas nulle, par exemple $z - z' \neq 0$. Alors

$$\vec{k} = \frac{x' - x}{z - z'}\vec{i} + \frac{y' - y}{z - z'}\vec{j},$$

et dans ce cas les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ seraient coplanaires, ce qui est exclu.

Les trois différences $x' - x$, $y' - y$ et $z' - z$ sont donc nulles. □

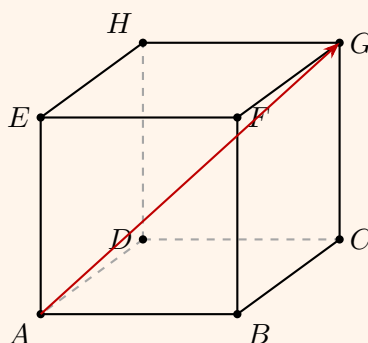
Définition 4.4: Base de l'espace

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs **non coplanaires** de l'espace.
On appelle **base de l'espace** le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Méthode 4.5: Reconnaître une base de l'espace

$ABCDEFGH$ est un cube.

- Reconnaître une base de l'espace.
- Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ dans cette base.



Correction

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont non coplanaires : ils forment donc une base de l'espace.
- Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ se décompose dans la base $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CG})$ en

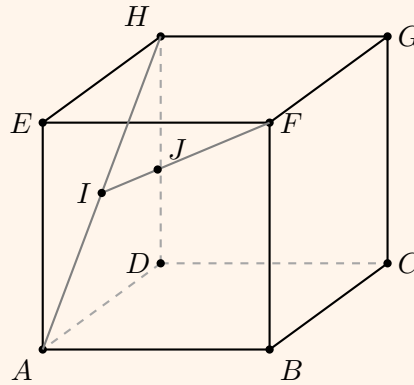
$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}.$$

Méthode 4.6: Démontrer un alignement par décomposition dans une base

$ABCDEFGH$ est un cube. Soit I le milieu de $[AH]$ et J le point de $[FI]$ tel que

$$\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FI}.$$

Démontrer que les points E , J et C sont alignés.



Correction

Pour prouver cet alignement, on va démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires : il est donc possible de décomposer $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{EJ} &= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FI} \\
 &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\right) \\
 &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right) \\
 &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EH} \\
 &= \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\
 &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}.
 \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}.$$

Donc $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$: les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires, et donc les points E , J et C sont alignés.

4.2 Repère de l'espace

Définition 4.7: Repère de l'espace

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires et O un point de l'espace. On appelle **repère de l'espace** le quadruplet $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Remarque : Coordonnées

— O est appelé l'**origine** du repère.

— La décomposition $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ donne les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du **point** M : x

est l'**abscisse** de M , y son **ordonnée** et z sa **cote**.

— De même, la décomposition $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ donne les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du **vecteur** $\vec{u}$.

Propriété 4.8: Coordonnées d'un vecteur et d'un milieu

Soit deux points $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$.

— Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

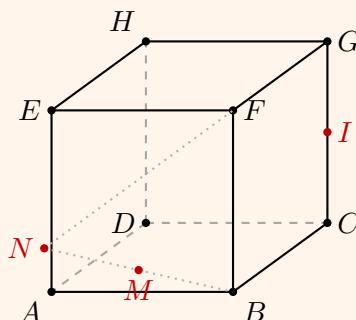
— Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont $\begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \\ \frac{z_A + z_B}{2} \end{pmatrix}$.

Méthode 4.9: Lire des coordonnées dans l'espace

Soit un parallélépipède $ABCDEFGH$. I est le milieu de $[CG]$. Les points M et N sont définis par

$$\overrightarrow{NF} = 2\overrightarrow{FG} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CI}.$$

1. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, donner les coordonnées de tous les points de la figure.
2. Placer le point $K(1; 3; -1)$.
3. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont égaux.
4. Démontrer que M est le milieu du segment $[BN]$.



Correction

1. Coordonnées des sommets :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, D \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$I \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \quad N \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Le point $K(1; 3; -1)$ se place à partir de A en se déplaçant de 1 suivant $\overrightarrow{AB}$, de 3 suivant $\overrightarrow{AD}$ et de -1 suivant $\overrightarrow{AE}$.

3.

$$\overrightarrow{IF} \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-1 \\ 1-0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 1-1 \\ -2-(-1) \\ 1-0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

Donc $\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{MN}$.

4. Le milieu du segment $[BN]$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} \frac{1+1}{2} \\ \frac{0+(-2)}{2} \\ \frac{0+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit bien des coordonnées de M : M est donc le milieu de $[BN]$.

Méthode 4.10: Démontrer que quatre points sont coplanaires

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D \begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que les points A , B , C et D sont coplanaires.

Correction

On va démontrer que les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$, de même origine A , sont coplanaires. Pour cela, on cherche un couple de réels $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{AD} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$.

- Calculons les coordonnées des trois vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 11 \\ -15 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- L'égalité $\overrightarrow{AD} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$ conduit au système

$$\begin{cases} 4x - y = 11 \\ -6x + y = -15 \\ -4x - 3y = 1 \end{cases}$$

- La somme membre à membre des deux premières lignes donne $-2x = -4$, d'où $x = 2$. En remplaçant dans la deuxième équation : $-12 + y = -15$, d'où $y = -3$.
- Il reste à vérifier la troisième équation :

$$-4 \times 2 - 3 \times (-3) = -8 + 9 = 1.$$

C'est le cas, donc le couple $(2; -3)$ convient.

• On a donc $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires et tous les trois d'origine A : on en déduit que les points A , B , C et D sont coplanaires.

5 Coplanarité de trois vecteurs et résolution de système

La caractérisation de la coplanarité vue à la partie précédente est *géométrique* : trois vecteurs sont coplanaires lorsque l'un d'eux s'écrit comme combinaison linéaire des deux autres. Dès que l'on travaille avec des coordonnées, cette condition se traduit par un **système d'équations** : la question géométrique devient une question de calcul.

5.1 Traduction en système

Propriété 5.1: Critère de coplanarité par un système

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace et trois vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}, \quad \vec{v} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}, \quad \vec{w} \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix},$$

où $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

Alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels x et y tels que $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$, c'est-à-dire si et seulement si le système

$$\begin{cases} x x_v + y x_w = x_u \\ x y_v + y y_w = y_u \\ x z_v + y z_w = z_u \end{cases}$$

d'inconnues x et y **admet une solution**.

Propriété 5.2: Conséquence : reconnaître une base

Avec les mêmes notations, si le système précédent **n'admet aucune solution**, alors les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires : ils forment donc une **base de l'espace**.

Remarque : Un système de trois équations à deux inconnues

Ce système a une particularité : il comporte **trois** équations pour seulement **deux** inconnues. Il y a donc une équation « de trop », et deux conséquences pratiques :

- on résout le système à l'aide de **deux** des trois équations, ce qui donne au plus un couple $(x; y)$;
- il faut ensuite **vérifier** ce couple dans la troisième équation, qui n'a pas encore servi. Cette vérification n'est pas une précaution de calcul : c'est elle qui décide de la conclusion.

Autrement dit, un système « impossible » n'est pas le signe d'une erreur : c'est exactement ce qui se produit lorsque les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

5.2 Première méthode de résolution : la substitution

Méthode 5.3: Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par substitution

1. **Choisir** une équation et une inconnue faciles à isoler : idéalement une inconnue dont le coefficient vaut 1 ou -1 , pour éviter les fractions.
2. **Isoler** cette inconnue dans l'équation choisie : on obtient une expression du type $x = \dots$, où ne figure plus que l'autre inconnue.
3. **Substituer** : dans l'*autre* équation, remplacer l'inconnue isolée par cette expression. Cette équation ne contient alors plus qu'une seule inconnue.
4. **Résoudre** cette équation à une inconnue.
5. **Remonter** : reporter la valeur trouvée dans l'expression de l'étape 2 pour obtenir la seconde inconnue.

Exemple 5.4: Résolution détaillée par substitution

Dans une base de l'espace, on considère

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ces trois vecteurs sont-ils coplanaires ?

Préliminaire. $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{-1}$, donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires : ils dirigent bien un plan.

Mise en système. On cherche deux réels x et y tels que $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$, c'est-à-dire

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales une à une, d'où le système

$$\begin{cases} x + 3y = -1 & (L_1) \\ 2x - y = 5 & (L_2) \\ -x + 2y = -4 & (L_3) \end{cases}$$

On met (L_3) de côté : on résout le système formé par (L_1) et (L_2) , puis on vérifiera dans (L_3) .

Étape 1 – choisir l'inconnue à isoler. Dans (L_1) , le coefficient de x vaut 1 : c'est le choix le plus économique.

Étape 2 – isoler x dans (L_1) . De $x + 3y = -1$ on tire $x = -1 - 3y$. Le système devient

$$\begin{cases} x = -1 - 3y \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

Étape 3 – substituer. On remplace x par $-1 - 3y$ dans la deuxième ligne :

$$\begin{cases} x = -1 - 3y \\ 2(-1 - 3y) - y = 5 \end{cases}$$

La deuxième ligne ne contient plus qu'une seule inconnue : y .

Étape 4 – résoudre l'équation à une inconnue.

$$\begin{aligned} 2(-1 - 3y) - y = 5 &\iff -2 - 6y - y = 5 \\ &\iff -7y = 5 + 2 \\ &\iff -7y = 7 \\ &\iff y = -1. \end{aligned}$$

Le système devient

$$\begin{cases} x = -1 - 3y \\ y = -1 \end{cases}$$

Étape 5 – remonter. On reporte $y = -1$ dans la première ligne :

$$x = -1 - 3 \times (-1) = -1 + 3 = 2,$$

d'où

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Étape 6 – vérifier dans (L_3) . L'équation (L_3) n'a pas encore servi :

$$-x + 2y = -2 + 2 \times (-1) = -2 - 2 = -4. \quad \checkmark$$

Le couple $(2; -1)$ vérifie bien les **trois** équations.

Conclusion. $\vec{u} = 2\vec{v} - \vec{w}$: les trois vecteurs **sont coplanaires**.

5.3 Seconde méthode de résolution : la combinaison

Méthode 5.5: Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par combinaison

1. **Choisir** l'inconnue que l'on veut faire disparaître.
2. **Multiplier** chacune des deux équations par un nombre bien choisi, de sorte que les coefficients de cette inconnue deviennent **opposés** (on ajoutera alors les deux lignes) ou **égaux** (on les soustraira).
3. **Combiner** les deux lignes membre à membre : l'inconnue choisie disparaît, il reste une équation à une seule inconnue.
4. **Résoudre** cette équation.
5. **Recommencer** la même opération avec l'autre inconnue – ou, plus rapidement, reporter la valeur trouvée dans l'une des équations de départ.

Remarque : Notation des combinaisons

On note $a(L_1) + b(L_2)$ la ligne obtenue en multipliant (L_1) par a , (L_2) par b , puis en additionnant membre à membre. Il est indispensable d'écrire cette opération à côté de la ligne obtenue : c'est ce qui rend le calcul relisible et vérifiable.

Exemple 5.6: Le même système, résolu par combinaison

Reprenons le système de l'exemple précédent :

$$\begin{cases} x + 3y = -1 & (L_1) \\ 2x - y = 5 & (L_2) \\ -x + 2y = -4 & (L_3) \end{cases}$$

Étape 1 – éliminer y . Les coefficients de y sont 3 et -1 . En multipliant (L_2) par 3, ils deviennent 3 et -3 : ils sont opposés, on peut donc additionner.

$$\begin{cases} x + 3y = -1 & (L_1) \\ 6x - 3y = 15 & 3(L_2) \end{cases}$$

Étape 2 – additionner membre à membre.

$$\underbrace{(x + 3y)}_{(L_1)} + \underbrace{(6x - 3y)}_{3(L_2)} = \underbrace{-1}_{(L_1)} + \underbrace{15}_{3(L_2)}$$

c'est-à-dire

$$7x + 0y = 14, \quad \text{soit} \quad 7x = 14 \iff x = 2.$$

Étape 3 – éliminer x à son tour. Les coefficients de x sont 1 et 2. En multipliant (L_1) par 2, ils deviennent égaux, on peut donc soustraire.

$$\begin{cases} 2x + 6y = -2 & 2(L_1) \\ 2x - y = 5 & (L_2) \end{cases}$$

puis

$$\underbrace{(2x + 6y)}_{2(L_1)} - \underbrace{(2x - y)}_{(L_2)} = -2 - 5,$$

c'est-à-dire

$$7y = -7 \iff y = -1.$$

Étape 4 – vérifier dans (L_3) .

$$-x + 2y = -2 + 2 \times (-1) = -4. \quad \checkmark$$

Conclusion. On retrouve bien $(x; y) = (2; -1)$, donc $\vec{u} = 2\vec{v} - \vec{w}$: les trois vecteurs **sont coplanaires**.

Remarque : Quelle méthode choisir ?

Les deux méthodes donnent évidemment le même résultat ; seule la quantité de calcul change.

- La **substitution** est la plus naturelle lorsqu'une inconnue a pour coefficient 1 ou -1 dans l'une des équations : on l'isole sans produire de fraction.
- La **combinaison** est préférable lorsque *aucun* coefficient ne vaut 1 ni -1 : isoler une inconnue ferait alors apparaître des fractions dès la première étape, que l'on traînerait ensuite dans tout le calcul.
- La combinaison présente en outre un avantage de présentation : les deux inconnues s'obtiennent par le même procédé, sans étape de « remontée ».

Exemple 5.7: Un système où la combinaison s'impose

Dans une base de l'espace, on considère

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ces trois vecteurs sont-ils coplanaires ?

Preliminaire. $\frac{3}{2} \neq \frac{2}{-3}$, donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

Mise en système. On cherche x et y tels que $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 & (L_1) \\ 2x - 3y = 7 & (L_2) \\ -x + 4y = -6 & (L_3) \end{cases}$$

Aucun coefficient de (L_1) ni de (L_2) ne vaut 1 : isoler une inconnue donnerait par exemple $x = \frac{4-2y}{3}$, expression avec laquelle la suite du calcul serait pénible. On choisit donc la combinaison.

Étape 1 – éliminer y . Les coefficients de y sont 2 et -3 . On multiplie (L_1) par 3 et (L_2) par 2 pour les rendre opposés :

$$\begin{cases} 9x + 6y = 12 & 3(L_1) \\ 4x - 6y = 14 & 2(L_2) \end{cases}$$

En additionnant membre à membre :

$$13x = 26 \iff x = 2.$$

Étape 2 – éliminer x . Les coefficients de x sont 3 et 2. On multiplie (L_1) par 2 et (L_2) par 3 pour les rendre égaux :

$$\begin{cases} 6x + 4y = 8 & 2(L_1) \\ 6x - 9y = 21 & 3(L_2) \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre :

$$13y = 8 - 21 = -13 \iff y = -1.$$

Étape 3 – vérifier dans (L_3) .

$$-x + 4y = -2 + 4 \times (-1) = -6. \quad \checkmark$$

Conclusion. $\vec{u} = 2\vec{v} - \vec{w}$: les trois vecteurs sont coplanaires.

5.4 Le cas où le système n'a pas de solution

Exemple 5.8: Trois vecteurs non coplanaires

Dans une base de l'espace, on considère

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ces trois vecteurs sont-ils coplanaires ?

Préliminaire. $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1}$, donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

Mise en système. On cherche x et y tels que $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & (L_1) \\ -x + y = 2 & (L_2) \\ x + y = 3 & (L_3) \end{cases}$$

Ici, c'est l'équation (L_1) que l'on met de côté : on résout à l'aide de (L_2) et (L_3) , dont les coefficients sont les plus simples.

Étape 1 – éliminer y . Les coefficients de y dans (L_2) et (L_3) sont tous deux égaux à 1 : on soustrait directement.

$$\underbrace{(x + y)}_{(L_3)} - \underbrace{(-x + y)}_{(L_2)} = 3 - 2 \iff 2x = 1 \iff x = \frac{1}{2}.$$

Étape 2 – éliminer x . Les coefficients de x sont -1 et 1 : ils sont opposés, on additionne.

$$\underbrace{(-x + y)}_{(L_2)} + \underbrace{(x + y)}_{(L_3)} = 2 + 3 \iff 2y = 5 \iff y = \frac{5}{2}.$$

Le couple $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ est donc la seule solution possible du système de départ : c'est l'unique couple qui vérifie à la fois (L_2) et (L_3) .

Étape 3 – vérifier dans (L_1) .

$$2x + y = 2 \times \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2} \neq 1.$$

La vérification **échoue**.

Conclusion. Aucun couple $(x; y)$ ne vérifie les trois équations à la fois : le système n'admet pas de solution. Il n'existe donc pas de réels x et y tels que $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$: les trois vecteurs **ne sont pas coplanaires**, et ils forment par conséquent une base de l'espace.

Remarque : Ne pas s'arrêter trop tôt

Deux erreurs de raisonnement reviennent souvent :

- **conclure avant la vérification** : avoir trouvé un couple $(x; y)$ à l'aide de deux équations ne prouve rien tant que la troisième n'a pas été testée ;
- **croire à une erreur de calcul** lorsque la vérification échoue. Ce n'est pas un échec :

c'est la réponse. Un système sans solution signifie précisément que les vecteurs ne sont pas coplanaires.

5.5 La démarche complète

Méthode 5.9: Étudier la coplanarité de trois vecteurs

Pour déterminer si trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dont on connaît les coordonnées sont coplanaires :

1. **Vérifier** que deux des trois vecteurs, par exemple $\vec{v}$ et $\vec{w}$, ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles). C'est ce qui garantit qu'ils dirigent bien un plan.
2. **Écrire** l'égalité $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$ coordonnée par coordonnée : on obtient un système de trois équations à deux inconnues, dont les lignes sont numérotées (L_1) , (L_2) , (L_3) .
3. **Résoudre** le système formé par deux de ces trois équations – celles dont les coefficients sont les plus simples – par **substitution** ou par **combinaison**.
4. **Vérifier** le couple obtenu dans la troisième équation, restée inutilisée.
5. **Conclure** :
 - si la troisième équation est vérifiée, le système a une solution : les trois vecteurs **sont coplanaires** et $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$;
 - sinon, le système n'a pas de solution : les trois vecteurs **ne sont pas coplanaires**, et ils forment une base de l'espace.

Remarque : Choix du vecteur isolé

Le rôle joué par $\vec{u}$ peut être tenu par n'importe lequel des trois vecteurs : on choisit en pratique celui qui rend les calculs les plus simples (par exemple celui qui comporte un 0 ou un 1). La conclusion, elle, ne dépend pas de ce choix.

Remarque : Application aux points

Ce critère s'applique directement à quatre points A , B , C et D : ils sont coplanaires si et seulement si les trois vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$, **de même origine** A , sont coplanaires (voir la méthode « Démontrer que quatre points sont coplanaires », partie 4.2).

6 Bilan

Bilan

- Une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ est un vecteur de la forme $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.
- Trois vecteurs sont **coplanaires** s'ils ont des représentants dans un même plan ; concrètement, si l'un d'eux s'écrit comme combinaison linéaire des deux autres. Avec des coordonnées, cela revient à résoudre un **système de trois équations à deux inconnues** : on le résout avec deux équations, puis on **vérifie** dans la troisième.
- Trois vecteurs **non coplanaires** forment une **base** de l'espace : tout vecteur s'y décompose de manière **unique**.
- Un point et une base forment un **repère** de l'espace ; coordonnées d'un vecteur et d'un milieu se calculent comme dans le plan, avec une troisième coordonnée.
- Deux droites de l'espace sont **coplanaires** (sécantes, strictement parallèles ou confondues) ou **non coplanaires** ; deux plans sont sécants ou parallèles ; une droite et un plan sont sécants ou parallèles.

Conclusion

La décomposition dans une base transforme les questions de géométrie (alignement, coplanarité, parallélisme) en questions de **calcul** : résolution de systèmes, comparaison de coordonnées. C'est ce point de vue qui sera systématisé dans les chapitres suivants, avec les représentations paramétriques et le produit scalaire dans l'espace.