

Devoir surveillé n°4 – Groupe 1

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Mathématiques – Terminale – Enseignement de spécialité

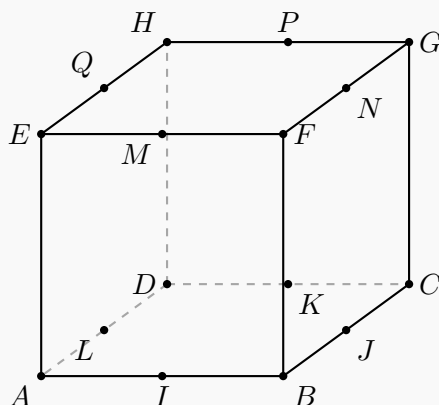
Durée : 1 heure. La qualité de la rédaction et la clarté des justifications entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

1 Décomposition dans une base (5 points)

Exercice 1: Décomposition dans une base

(5 points)

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous dans lequel les points I, J, K, L, M, N, P, Q sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[DC]$, $[AD]$, $[EF]$, $[FG]$, $[HG]$ et $[EH]$.



- Décomposer les vecteurs suivants dans la base $(\overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HD})$:
 a) $\overrightarrow{HA}$ b) $\overrightarrow{DB}$ c) $\overrightarrow{AP}$ d) $\overrightarrow{HN}$ e) $\overrightarrow{HI}$
- En déduire les coordonnées des points A, B, K dans le repère $(H; \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HD})$.
- Déterminer les coordonnées du milieu S de $[IN]$.

Correction de l'exercice 1

1.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \overrightarrow{HA} &= \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HD} \\
 \text{b) } \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG} \\
 \text{c) } \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HP} = -\overrightarrow{HD} - \overrightarrow{HE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HG} \\
 \text{d) } \overrightarrow{HN} &= \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GN} = \overrightarrow{HG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HE} \\
 \text{e) } \overrightarrow{HI} &= \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}
 \end{aligned}$$

2. D'après la question 1, $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HD}$, donc $A(1; 0; 1)$.

$$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{HD} \quad \text{donc} \quad B(1; 1; 1).$$

$$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{HD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HG} \quad \text{donc} \quad K\left(0; \frac{1}{2}; 1\right).$$

3. S est le milieu de $[IN]$. D'après la question 1, $N\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$ et $I\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$, donc

$$S\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{2}; \frac{\frac{1}{2}+1}{2}; \frac{0+1}{2}\right) \quad \text{soit} \quad S\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right).$$

2 Coplanarité et position relative (7 points)

Exercice 2: Coplanarité et position relative

(7 points)

On considère dans un repère les points

$$A(3; -1; 2); \quad B(1; 2; 0); \quad C(7; -2; 5); \quad D(1; -8; 2).$$

- Montrer que A , B et C ne sont pas alignés.
- Montrer qu'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
 - Qu'en déduire pour les points A , B , C et D ?
- Soit $E(1; -3; 1)$; on admet que E appartient au plan (ABC) . Les droites (DE) et (BC) sont-elles parallèles? Justifier.
- Quelle est la position relative de (DE) avec (ABC) ? Justifier.

Correction de l'exercice 2

- On a $\overrightarrow{AB}(1-3; 2-(-1); 0-2)$, donc $\overrightarrow{AB}(-2; 3; -2)$,
et $\overrightarrow{AC}(7-3; -2-(-1); 5-2)$, donc $\overrightarrow{AC}(4; -1; 3)$.
Or $\frac{-2}{4} \neq \frac{3}{-1}$, donc il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$: les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que les points A , B et C ne sont pas alignés et définissent un plan.
- On a $\overrightarrow{AD}(1-3; -8-(-1); 2-2)$, donc $\overrightarrow{AD}(-2; -7; 0)$. Déterminons les réels x et y :

$$\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} -2x + 4y = -2 & (L_1) \\ 3x - y = -7 & (L_2) \\ -2x + 3y = 0 & (L_3) \end{cases}$$

On résout à l'aide de (L_2) et (L_3) ; (L_1) servira à la vérification.

$$\iff \begin{cases} -2x + 4y = -2 \\ y = 3x + 7 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + 4y = -2 \\ y = 3x + 7 \\ -2x + 3(3x + 7) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + 4y = -2 \\ y = 3x + 7 \\ 7x + 21 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + 4y = -2 \\ y = 3x + 7 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + 4y = -2 \\ y = 3 \times (-3) + 7 \\ x = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + 4y = -2 \\ y = -2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Vérification dans (L_1) : $-2 \times (-3) + 4 \times (-2) = 6 - 8 = -2$. ✓

Ainsi $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

b) On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires et par suite que les points A , B , C et D sont coplanaires.

3. On a $\overrightarrow{DE}(1-1; -3-(-8); 1-2)$, donc $\overrightarrow{DE}(0; 5; -1)$,

et $\overrightarrow{BC}(7-1; -2-2; 5-0)$, donc $\overrightarrow{BC}(6; -4; 5)$.

Or $\frac{0}{6} \neq \frac{5}{-4}$, donc il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{DE} = k\overrightarrow{BC}$: les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que les droites (DE) et (BC) ne sont pas parallèles.

4. Comme les points E et D appartiennent au plan (ABC) , la droite (DE) est contenue dans (ABC) .

3 Trois vecteurs coplanaires ? (3 points)

Exercice 3: Trois vecteurs coplanaires ?

(3 points)

On considère les vecteurs $\vec{u}(-3; 5; 4)$, $\vec{v}(2; -3; 1)$ et $\vec{w}(5; -2; 3)$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.

Correction de l'exercice 3

$\frac{-3}{2} \neq \frac{5}{-3}$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont donc coplanaires si et seulement s'il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Or

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} \iff \begin{cases} -3x + 2y = 5 & (L_1) \\ 5x - 3y = -2 & (L_2) \\ 4x + y = 3 & (L_3) \end{cases}$$

On résout à l'aide de (L_1) et (L_3) ; (L_2) servira à la vérification.

$$\iff \begin{cases} -3x + 2y = 5 \\ 5x - 3y = -2 \\ y = 3 - 4x \end{cases} \iff \begin{cases} -3x + 2(3 - 4x) = 5 \\ 5x - 3y = -2 \\ y = 3 - 4x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -11x + 6 = 5 \\ 5x - 3y = -2 \\ y = 3 - 4x \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{11} \\ 5x - 3y = -2 \\ y = 3 - 4x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{11} \\ 5x - 3y = -2 \\ y = 3 - 4 \times \frac{1}{11} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{11} \\ 5x - 3y = -2 \\ y = \frac{29}{11} \end{cases}$$

Vérification dans (L_2) :

$$5 \times \frac{1}{11} - 3 \times \frac{29}{11} = \frac{5}{11} - \frac{87}{11} = -\frac{82}{11} \neq -2.$$

Le système n'admet pas de solution : il n'existe donc pas de réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$, et ainsi les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

4 Alignement de trois points (5 points)

Exercice 4: Alignement de trois points

(5 points)

On considère le cube $ABCDEFGH$ de l'exercice 1.

S et T sont les points définis par $\overrightarrow{AS} = 3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AT} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{SG} = -2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{ST}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.
3. En déduire que les points S , T et G sont alignés.

Correction de l'exercice 4

1. On a

$$\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$$

(car $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$ dans le cube $ABCDEFGH$),

donc

$$\overrightarrow{SG} = -3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}.$$

- 2.

$$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AT} = -\overrightarrow{AS} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AE}.$$

3. On a

$$\frac{3}{2} \times \overrightarrow{SG} = \frac{3}{2} \times (-2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}) = -3\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ST}.$$

Ainsi $\frac{3}{2}\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{ST}$: les vecteurs $\overrightarrow{SG}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont colinéaires, et donc les points S , T et G sont alignés.