

# Vecteurs, droites et plans de l'espace

Feuilles d'exercices et corrections

Mathématiques – Terminale – Enseignement de spécialité

Ce document regroupe l'ensemble des exercices du chapitre : bases de l'espace, colinéarité et coplanarité, repérage, puis un exercice d'ouverture vers l'enseignement supérieur.

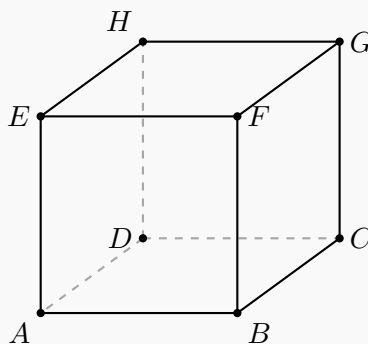
Les corrections s'affichent ou non selon le réglage de **showcorr** en tête de fichier.

## Feuille 1 – Vecteurs et base de l'espace

### 1 Sommes de vecteurs dans un cube

#### Exercice 1: Sommes de vecteurs dans un cube

$ABCDEFGH$  est le cube représenté ci-dessous.



- Démontrer que  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB}$ .
- $I$  est le milieu de l'arête  $[FG]$ . Quel est le point  $M$  tel que  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{AM}$  ?
- Quel est le vecteur  $\vec{u}$  tel que  $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{FB} + \vec{u} = \vec{0}$  ?
- $J$  et  $K$  sont les milieux respectifs des arêtes  $[AB]$  et  $[AE]$ . Quel est le point  $M$  tel que  $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{KB}$  ?

#### Correction de l'exercice 1

On se place dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ , dans lequel

$$A(0; 0; 0), \quad B(1; 0; 0), \quad C(1; 1; 0), \quad D(0; 1; 0),$$

$$E(0; 0; 1), \quad F(1; 0; 1), \quad G(1; 1; 1), \quad H(0; 1; 1).$$

- Avec la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB} &\iff \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{CF} \\ &\iff \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC} \\ &\iff \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}, \end{aligned}$$

ce qui est vrai. L'égalité de départ est donc vraie.

2.  $ABFE$  est un carré, donc  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF}$ . Ainsi

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{AI}.$$

Le point  $M$  cherché est donc le point  $I$ , milieu de  $[FG]$ .

3. Avec les coordonnées :

$$\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{HE} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{FB} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

donc  $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{FB}$  a pour coordonnées  $(1; 0; 0)$ , c'est-à-dire  $\overrightarrow{AB}$ .

On en déduit  $\vec{u} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ .

4.  $J \left( \frac{1}{2}; 0; 0 \right)$  et  $K \left( 0; 0; \frac{1}{2} \right)$ . En notant  $M(x; y; z)$  :

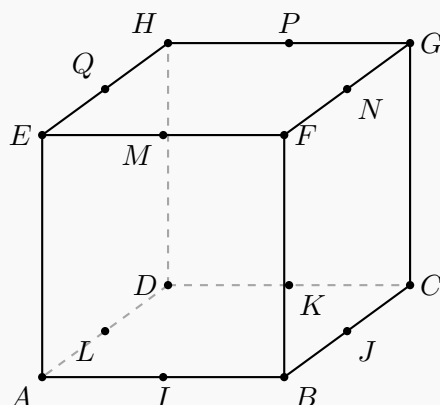
$$\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{KB} \iff \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \frac{3}{2} - x = 1 \\ -y = 0 \\ -z = -\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc  $M \left( \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2} \right)$  :  $M$  est le centre du carré  $ABFE$ , c'est-à-dire le milieu de  $[AF]$  (ou de  $[BE]$ ).

## 2 Décomposition dans une base et coordonnées

### Exercice 2: Décomposition dans une base et coordonnées

On considère le cube  $ABCDEFGH$  ci-dessous, dans lequel les points  $I, J, K, L, M, N, P, Q$  sont les milieux respectifs des segments  $[AB], [BC], [DC], [AD], [EF], [FG], [HG]$  et  $[EH]$ .



1. Décomposer les vecteurs suivants dans la base  $(\overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HD})$  :

a)  $\overrightarrow{HA}$    b)  $\overrightarrow{DB}$    c)  $\overrightarrow{AP}$    d)  $\overrightarrow{HN}$    e)  $\overrightarrow{HI}$

2. En déduire les coordonnées des points  $A, B, K$  dans le repère  $(H; \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HD})$ .

3. Déterminer les coordonnées du milieu  $S$  de  $[IN]$ .

## Correction de l'exercice 2

1.

- a)  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HD}$  donc  $\overrightarrow{HA}(1; 0; 1)$   
 b)  $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG}$  donc  $\overrightarrow{DB}(1; 1; 0)$   
 c)  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HP} = -\overrightarrow{HD} - \overrightarrow{HE} + 0,5 \overrightarrow{HG}$  donc  $\overrightarrow{AP}(-1; 0,5; -1)$   
 d)  $\overrightarrow{HN} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GN} = \overrightarrow{HG} + 0,5 \overrightarrow{HE}$  donc  $\overrightarrow{HN}(0,5; 1; 0)$   
 e)  $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HD} + 0,5 \overrightarrow{HG}$  donc  $\overrightarrow{HI}(1; 0,5; 1)$

*Attention* : les coordonnées sont données **dans l'ordre de la base**  $(\overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HD})$  : la première est le coefficient de  $\overrightarrow{HE}$ , la deuxième celui de  $\overrightarrow{HG}$ , la troisième celui de  $\overrightarrow{HD}$  – et non l'ordre dans lequel les vecteurs apparaissent au cours du calcul.

2. Par définition, les coordonnées d'un point sont les coordonnées du vecteur ayant l'origine du repère comme point de départ et ce point comme point d'arrivée.

D'après la question 1,  $\overrightarrow{HA}(1; 0; 1)$ , donc  $A(1; 0; 1)$ .

$$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{HD} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{HB}(1; 1; 1) \quad \text{donc} \quad B(1; 1; 1).$$

$$\overrightarrow{HK} = 0,5 \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{HD} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{HK}(0; 0,5; 1) \quad \text{donc} \quad K(0; 0,5; 1).$$

3. D'après la question 1,  $I(1; 0,5; 1)$  et  $N(0,5; 1; 0)$ , donc

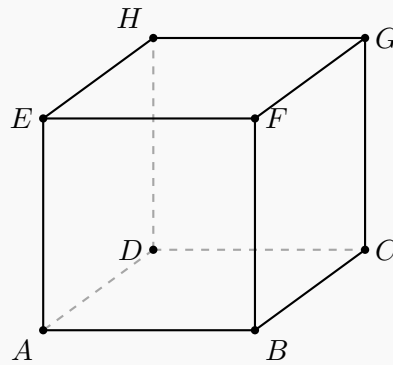
$$S \begin{pmatrix} \frac{x_I + x_N}{2} \\ \frac{y_I + y_N}{2} \\ \frac{z_I + z_N}{2} \end{pmatrix} \iff S \begin{pmatrix} \frac{1 + 0,5}{2} \\ \frac{0,5 + 1}{2} \\ \frac{0 + 1}{2} \end{pmatrix} \iff S \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0,75 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

## 3 Placer des points et calculer des coordonnées

## Exercice 3: Placer des points et calculer des coordonnées

$ABCDEFGH$  est un cube d'arête 1. Dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ , on considère les points

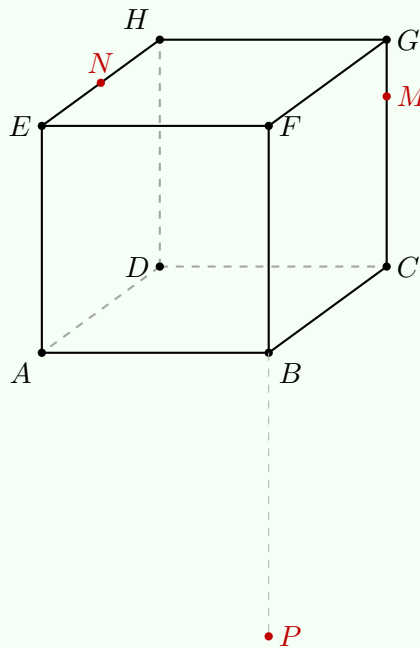
$$M\left(1; 1; \frac{3}{4}\right), \quad N\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), \quad P\left(1; 0; -\frac{5}{4}\right).$$



1. Placer  $M$ ,  $N$  et  $P$  sur la figure.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :  $\overrightarrow{AB}$  ;  $\overrightarrow{EG}$  ;  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EG}$  et  $3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EG})$ .

### Correction de l'exercice 3

1.  $M(1; 1; \frac{3}{4})$  est le point de l'arête  $[CG]$  situé à la hauteur  $\frac{3}{4}$  ;  $N(0; \frac{1}{2}; 1)$  est le milieu de l'arête  $[EH]$  ;  $P(1; 0; -\frac{5}{4})$  est le point de la droite  $(BF)$  situé *sous* le plan  $(ABC)$ , à la distance  $\frac{5}{4}$  de  $B$ .



2.  $\overrightarrow{AB}(1; 0; 0)$ .  
 $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$  donc  $\overrightarrow{EG}(1; 1; 0)$ .

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EG}) \begin{pmatrix} 1+1 \\ 0+1 \\ 0+0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EG}) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EG}) \begin{pmatrix} 3 \times 2 \\ 3 \times 1 \\ 3 \times 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EG}) \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## 4 Trois vecteurs sont-ils coplanaires ?

### Exercice 4: Trois vecteurs sont-ils coplanaires ?

On se place dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

On considère les vecteurs  $\vec{u}(-3; 5; 4)$ ,  $\vec{v}(2; -3; 1)$  et  $\vec{w}(5; -2; 3)$ .

Ces trois vecteurs sont-ils coplanaires ?

### Correction de l'exercice 4

$\frac{2}{5} \neq \frac{-3}{-2}$ , donc  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  ne sont pas colinéaires. Les trois vecteurs sont donc coplanaires si et seulement s'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$ .

En écrivant cette égalité coordonnée par coordonnée :

$$\begin{aligned} \vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w} &\iff \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2a + 5b = -3 & (L_1) \\ -3a - 2b = 5 & (L_2) \\ a + 3b = 4 & (L_3) \end{cases} \end{aligned}$$

Résolvons à l'aide de  $(L_1)$  et  $(L_3)$ , dans lesquelles  $a$  a le coefficient le plus simple :  $(L_2)$  servira à la vérification.

$$\begin{aligned} \iff \begin{cases} 2a + 5b = -3 \\ -3a - 2b = 5 \\ a = 4 - 3b \end{cases} &\iff \begin{cases} 2(4 - 3b) + 5b = -3 \\ -3a - 2b = 5 \\ a = 4 - 3b \end{cases} \\ \iff \begin{cases} 8 - 6b + 5b = -3 \\ -3a - 2b = 5 \\ a = 4 - 3b \end{cases} &\iff \begin{cases} -b = -11 \\ -3a - 2b = 5 \\ a = 4 - 3b \end{cases} \\ \iff \begin{cases} b = 11 \\ -3a - 2b = 5 \\ a = 4 - 3 \times 11 \end{cases} &\iff \begin{cases} b = 11 \\ -3a - 2b = 5 \\ a = -29 \end{cases} \end{aligned}$$

Il reste une dernière étape : vérifier que ces valeurs sont compatibles avec  $(L_2)$ , qui n'a pas encore été utilisée :

$$-3 \times (-29) - 2 \times 11 = 87 - 22 = 65 \neq 5.$$

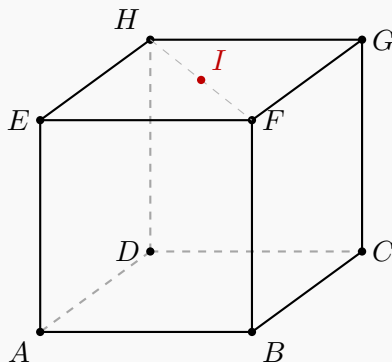
Le système n'admet donc pas de solution : **les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.**

## 5 Un point défini par une relation vectorielle

### Exercice 5: Un point défini par une relation vectorielle

$ABCDEFGH$  est un cube.  $I$  est le milieu de  $[HF]$ .

Le point  $M$  vérifie :  $2\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{MA}$ .



1. Déterminer les coordonnées du point  $M$ .
2. Démontrer que  $E$ ,  $M$  et  $C$  sont alignés.

### Correction de l'exercice 5

On se place dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ .

1. Soit  $M(x; y; z)$ . On a  $I(0,5; 0,5; 1)$  et  $A(0; 0; 0)$ , donc

$$2\overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} 2x-1 \\ 2y-1 \\ 2z-2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}.$$

On doit donc résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x-1 = -x \\ 2y-1 = -y \\ 2z-2 = -z \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = 1 \\ 3y = 1 \\ 3z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc  $M\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ .

2.  $E(0; 0; 1)$  et  $C(1; 1; 0)$ , donc

$$\overrightarrow{EM} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}-0 \\ \frac{1}{3}-0 \\ \frac{2}{3}-1 \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{EM} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc  $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$  : ces deux vecteurs sont colinéaires, donc les points  $E$ ,  $M$  et  $C$  sont alignés.

## 6 Coplanarité de quatre points et position relative

### Exercice 6: Coplanarité de quatre points et position relative

On considère dans un repère les points

$$A(-2; 2; 1); \quad B(3; 1; 2); \quad C(0; -1; 5); \quad D(-1; -6; 12); \quad E(5; -2; 6).$$

- Montrer que  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés.
- Montrer qu'il existe deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AD}$ .
  - Qu'en déduire pour les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ ?
- Montrer que  $(DE)$  et  $(BC)$  sont parallèles.
- En déduire la position relative de  $(DE)$  et  $(ABC)$ .

### Correction de l'exercice 6

- $\overrightarrow{AB}(5; -1; 1)$  et  $\overrightarrow{AC}(2; -3; 4)$ . Or  $\frac{5}{2} \neq \frac{-1}{-3}$ , donc les vecteurs ne sont pas colinéaires : les trois points ne sont pas alignés.
- $\overrightarrow{AD}(1; -8; 11)$ . Résolvons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AD} &\iff \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -3x - 8y = -1 \\ 4x + 11y = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 5 - 2x \\ -3x - 8y = -1 \\ 4x + 11y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 5 - 2x \\ -3x - 8(5 - 2x) = -1 \\ 4x + 11y = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 5 - 2x \\ x = 3 \\ 4x + 11y = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 5 - 2 \times 3 = -1 \\ x = 3 \\ 4x + 11y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

En vérifiant dans la dernière équation, on obtient  $4 \times 3 + 11 \times (-1) = 1$ .

Le système a donc pour solution  $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

- On en déduit que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$  sont coplanaires, donc que les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont coplanaires.
- $\overrightarrow{DE}(6; 4; -6)$  et  $\overrightarrow{BC}(-3; -2; 3)$ , donc  $\overrightarrow{DE} = -2\overrightarrow{BC}$  : ces deux vecteurs sont colinéaires, donc les droites  $(DE)$  et  $(BC)$  sont parallèles.

4.  $D$  appartient au plan  $(ABC)$  d'après la question 2b), donc la droite  $(DE)$  a un point commun avec  $(ABC)$ .

De plus  $(DE)$  est parallèle à  $(BC)$ , droite incluse dans le plan  $(ABC)$  : la droite  $(DE)$  est donc **incluse** dans le plan  $(ABC)$ .

### Feuille 3 – Coplanarité et base de l'espace

## 7 Exercices de coplanarité

### Exercice 7: Exercices de coplanarité

On se place dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

Dans chaque cas, les trois vecteurs sont-ils coplanaires ?

1.  $\vec{u}(2; -3; 4)$  ;  $\vec{v}(1; 7; -2)$  et  $\vec{w}(-1; 27; -14)$
2.  $\vec{u}(1; -3; -2)$  ;  $\vec{v}(2; 4; 6)$  et  $\vec{w}(0; -10; -10)$
3.  $\vec{u}(-2; -4; -1)$  ;  $\vec{v}(3; 2; 6)$  et  $\vec{w}(-7; 10; -8)$

### Correction de l'exercice 7

Dans les trois cas,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires. Les trois vecteurs sont donc coplanaires si et seulement s'il existe deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ .

1.

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} \iff \begin{cases} 2x + y = -1 & (L_1) \\ -3x + 7y = 27 & (L_2) \\ 4x - 2y = -14 & (L_3) \end{cases}$$

On résout à l'aide de  $(L_1)$  et  $(L_2)$  ;  $(L_3)$  servira à la vérification.

$$\iff \begin{cases} y = -1 - 2x \\ -3x + 7y = 27 \\ 4x - 2y = -14 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -1 - 2x \\ -3x + 7(-1 - 2x) = 27 \\ 4x - 2y = -14 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -1 - 2x \\ -17x - 7 = 27 \\ 4x - 2y = -14 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -1 - 2x \\ x = -2 \\ 4x - 2y = -14 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -1 - 2 \times (-2) \\ x = -2 \\ 4x - 2y = -14 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \\ 4x - 2y = -14 \end{cases}$$

Vérification dans  $(L_3)$  :  $4 \times (-2) - 2 \times 3 = -8 - 6 = -14$ . ✓

Donc  $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$  : les trois vecteurs **sont coplanaires**.

2.

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} \iff \begin{cases} x + 2y = 0 & (L_1) \\ -3x + 4y = -10 & (L_2) \\ -2x + 6y = -10 & (L_3) \end{cases}$$

On résout à l'aide de  $(L_1)$  et  $(L_2)$ ;  $(L_3)$  servira à la vérification.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ -3x + 4y = -10 \\ -2x + 6y = -10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ -3 \times (-2y) + 4y = -10 \\ -2x + 6y = -10 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ 10y = -10 \\ -2x + 6y = -10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ y = -1 \\ -2x + 6y = -10 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \times (-1) \\ y = -1 \\ -2x + 6y = -10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ -2x + 6y = -10 \end{cases} \end{aligned}$$

Vérification dans  $(L_3)$  :  $-2 \times 2 + 6 \times (-1) = -4 - 6 = -10$ . ✓

Donc  $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$  : les trois vecteurs **sont coplanaires**.

3.

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y = -7 & (L_1) \\ -4x + 2y = 10 & (L_2) \\ -x + 6y = -8 & (L_3) \end{cases}$$

On résout à l'aide de  $(L_1)$  et  $(L_2)$ ;  $(L_3)$  servira à la vérification.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y = -7 \\ y = 5 + 2x \\ -x + 6y = -8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3(5 + 2x) = -7 \\ y = 5 + 2x \\ -x + 6y = -8 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 15 = -7 \\ y = 5 + 2x \\ -x + 6y = -8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{11}{2} \\ y = 5 + 2x \\ -x + 6y = -8 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{11}{2} \\ y = 5 + 2 \times \left(-\frac{11}{2}\right) \\ -x + 6y = -8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{11}{2} \\ y = -6 \\ -x + 6y = -8 \end{cases} \end{aligned}$$

Vérification dans  $(L_3)$  :

$$-\left(-\frac{11}{2}\right) + 6 \times (-6) = \frac{11}{2} - 36 = -\frac{61}{2} \neq -8.$$

Le système n'admet pas de solution : les trois vecteurs **ne sont pas coplanaires**.

## 8 Exercice de recherche

### Exercice 8: Exercice de recherche

Soit  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base de l'espace.

On donne  $\vec{u} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$  et  $\vec{v} = \vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$ , où  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels.

Déterminer  $a$  et  $b$  tels que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient colinéaires.

**Correction de l'exercice 8**

Dans la base  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on a  $\vec{u}(-3; 4; -1)$  et  $\vec{v}(1; a; b)$ .

Pour que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient colinéaires, il faut que

$$\frac{1}{-3} = \frac{a}{4} = \frac{b}{-1},$$

ce qui nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{a}{4} = -\frac{1}{3} \\ -b = -\frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{4}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Donc il faut que  $a = -\frac{4}{3}$  et  $b = \frac{1}{3}$  pour que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient colinéaires.

On vérifie en effet que  $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{u}$ .

**9 Trois vecteurs forment-ils une base de l'espace ?****Exercice 9: Trois vecteurs forment-ils une base de l'espace ?**

Soit  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base de l'espace.

On donne  $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ ,  $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{k}$  et  $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j}$ .

Les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  forment-ils une base de l'espace ?

**Correction de l'exercice 9**

Trois vecteurs forment une base de l'espace si et seulement s'ils ne sont pas coplanaires.

Dans la base  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  :  $\vec{u}(1; 1; 3)$ ,  $\vec{v}(-1; 0; 2)$  et  $\vec{w}(2; 1; 0)$ .

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires (la deuxième coordonnée de  $\vec{v}$  est nulle, pas celle de  $\vec{u}$ ).

Cherchons s'il existe deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$  :

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} \iff \begin{cases} x - y = 2 & (L_1) \\ x = 1 & (L_2) \\ 3x + 2y = 0 & (L_3) \end{cases}$$

On résout à l'aide de  $(L_1)$  et  $(L_2)$  ;  $(L_3)$  servira à la vérification.

$$\iff \begin{cases} 1 - y = 2 \\ x = 1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

Vérification dans  $(L_3)$  :

$$3 \times 1 + 2 \times (-1) = 3 - 2 = 1 \neq 0.$$

Le système n'admet pas de solution : les trois vecteurs ne sont pas coplanaires, ils forment donc bien **une base de l'espace**.

## Feuille 4 – Vers le supérieur

## 10 Une base de l'espace des polynômes de degré au plus 2

**Exercice 10: Une base de l'espace des polynômes de degré au plus 2**

Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à deux. Toute fonction de  $\mathcal{F}$  s'écrit sous la forme  $ax^2 + bx + c$ , où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels.

À chaque fonction  $f$  de  $\mathcal{F}$ , on associe le vecteur  $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

On considère :

—  $f_1(x) = x^2 + x + 1$  et son vecteur associé  $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ;

—  $f_2(x) = x^2 - x + 1$  et son vecteur associé  $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ;

—  $f_3(x) = x^2$  et son vecteur associé  $\vec{v}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$  sont linéairement indépendants. En déduire que  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  est une base de l'espace.
2. Soient  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 2x^2 + x - 1$  et  $\vec{v}$  son vecteur associé.
  - a) Justifier que  $\vec{v}$  s'exprime de manière unique en fonction de  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$ .
  - b) Déterminer les réels  $r$ ,  $s$  et  $t$  tels que  $f(x) = r f_1(x) + s f_2(x) + t f_3(x)$ .

**Indication**

Dire que trois vecteurs sont **linéairement indépendants** est, dans l'enseignement supérieur, la façon de dire qu'ils ne sont pas coplanaires.

On utilisera donc le critère du cours :  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$  sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\vec{v}_3 = a \vec{v}_1 + b \vec{v}_2$ . Il s'agit donc de montrer que le système correspondant **n'admet pas de solution**.

**Correction de l'exercice 10**

1.  $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$ , donc  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  ne sont pas colinéaires.

Cherchons deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\vec{v}_3 = a \vec{v}_1 + b \vec{v}_2$  :

$$\vec{v}_3 = a \vec{v}_1 + b \vec{v}_2 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a + b = 1 & (L_1) \\ a - b = 0 & (L_2) \\ a + b = 0 & (L_3) \end{cases}$$

On résout à l'aide de  $(L_1)$  et  $(L_2)$ ;  $(L_3)$  servira à la vérification.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a=b \\ a+b=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b+b=1 \\ a=b \\ a+b=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ a=b \\ a+b=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{2} \\ a+b=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vérification dans  $(L_3)$  :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \neq 0.$$

Le système n'admet pas de solution :  $\vec{v}_3$  ne s'écrit pas comme combinaison linéaire de  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ . Les trois vecteurs ne sont donc pas coplanaires – autrement dit, ils sont linéairement indépendants – et ils forment une base de l'espace.

2. a)  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  est une base de l'espace : tout vecteur de l'espace, et en particulier  $\vec{v}$ , se décompose donc de manière **unique** dans cette base.

- b)  $f(x) = 2x^2 + x - 1$ , donc  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . On cherche  $r, s, t$  tels que  $\vec{v} = r\vec{v}_1 + s\vec{v}_2 + t\vec{v}_3$  :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} r+s+t=2 & (\text{coefficient de } x^2) \\ r-s=1 & (\text{coefficient de } x) \\ r+s=-1 & (\text{terme constant}) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} r+s+t=2 \\ r=1+s \\ r+s=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r+s+t=2 \\ r=1+s \\ 1+s+s=-1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} r+s+t=2 \\ r=1+s \\ s=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r+s+t=2 \\ r=0 \\ s=-1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 0+(-1)+t=2 \\ r=0 \\ s=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ r=0 \\ s=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi  $f = -f_2 + 3f_3$ , ce que l'on vérifie :

$$-(x^2 - x + 1) + 3x^2 = 2x^2 + x - 1 = f(x). \quad \checkmark$$