

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Feuilles d'exercices et corrections

Mathématiques – Terminale – Enseignement de spécialité

Ce document regroupe l'ensemble des exercices du chapitre : bases de l'espace, colinéarité et coplanarité, repérage, puis un exercice d'ouverture vers l'enseignement supérieur.

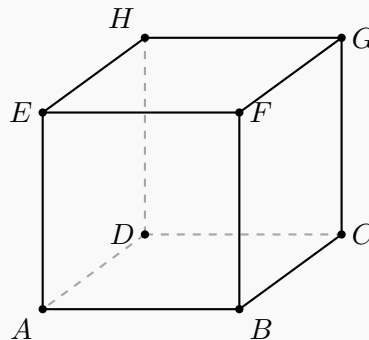
Les corrections s'affichent ou non selon le réglage de **showcorr** en tête de fichier.

Feuille 1 – Vecteurs et base de l'espace

1 Sommes de vecteurs dans un cube

Exercice 1: Sommes de vecteurs dans un cube

$ABCDEFGH$ est le cube représenté ci-dessous.

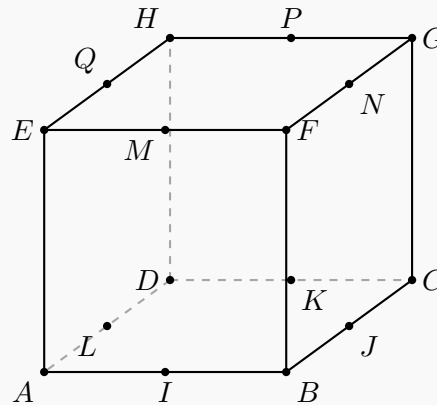


1. Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB}$.
2. I est le milieu de l'arête $[FG]$. Quel est le point M tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{AM}$?
3. Quel est le vecteur $\vec{u}$ tel que $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{FB} + \vec{u} = \vec{0}$?
4. J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$ et $[AE]$. Quel est le point M tel que $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{KB}$?

2 Décomposition dans une base et coordonnées

Exercice 2: Décomposition dans une base et coordonnées

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous, dans lequel les points I, J, K, L, M, N, P, Q sont les milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [DC], [AD], [EF], [FG], [HG]$ et $[EH]$.



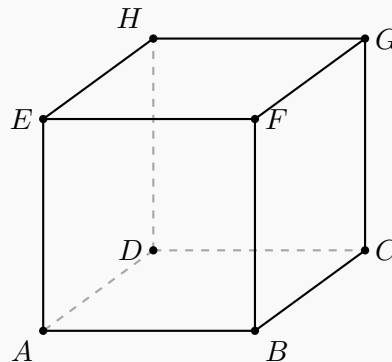
- Décomposer les vecteurs suivants dans la base $(\overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HD})$:
 a) $\overrightarrow{HA}$ b) $\overrightarrow{DB}$ c) $\overrightarrow{AP}$ d) $\overrightarrow{HN}$ e) $\overrightarrow{HI}$
- En déduire les coordonnées des points A, B, K dans le repère $(H; \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HD})$.
- Déterminer les coordonnées du milieu S de $[IN]$.

3 Placer des points et calculer des coordonnées

Exercice 3: Placer des points et calculer des coordonnées

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$, on considère les points

$$M\left(1; 1; \frac{3}{4}\right), \quad N\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), \quad P\left(1; 0; -\frac{5}{4}\right).$$



- Placer M, N et P sur la figure.
- Calculer les coordonnées des vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{EG}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EG}$ et $3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EG})$.

4 Trois vecteurs sont-ils coplanaires ?

Exercice 4: Trois vecteurs sont-ils coplanaires ?

On se place dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère les vecteurs $\vec{u}(-3; 5; 4)$, $\vec{v}(2; -3; 1)$ et $\vec{w}(5; -2; 3)$.

Ces trois vecteurs sont-ils coplanaires ?

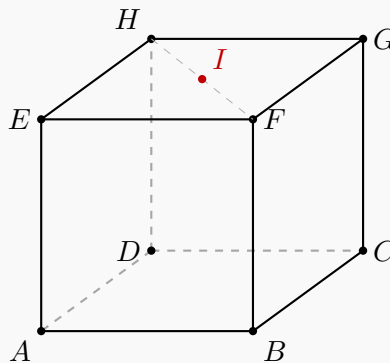
Feuille 2 – Colinéarité et coplanarité

5 Un point défini par une relation vectorielle

Exercice 5: Un point défini par une relation vectorielle

$ABCDEFGH$ est un cube. I est le milieu de $[HF]$.

Le point M vérifie : $2\vec{IM} = \vec{MA}$.



1. Déterminer les coordonnées du point M .
2. Démontrer que E , M et C sont alignés.

6 Coplanarité de quatre points et position relative

Exercice 6: Coplanarité de quatre points et position relative

On considère dans un repère les points

$$A(-2; 2; 1); \quad B(3; 1; 2); \quad C(0; -1; 5); \quad D(-1; -6; 12); \quad E(5; -2; 6).$$

1. Montrer que A , B et C ne sont pas alignés.
2. a) Montrer qu'il existe deux réels x et y tels que $\vec{AB} = x\vec{AC} + y\vec{AD}$.
b) Qu'en déduire pour les points A , B , C et D ?
3. Montrer que (DE) et (BC) sont parallèles.
4. En déduire la position relative de (DE) et (ABC) .

Feuille 3 – Coplanarité et base de l'espace

7 Exercices de coplanarité

Exercice 7: Exercices de coplanarité

On se place dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Dans chaque cas, les trois vecteurs sont-ils coplanaires ?

1. $\vec{u}(2; -3; 4)$; $\vec{v}(1; 7; -2)$ et $\vec{w}(-1; 27; -14)$
2. $\vec{u}(1; -3; -2)$; $\vec{v}(2; 4; 6)$ et $\vec{w}(0; -10; -10)$
3. $\vec{u}(-2; -4; -1)$; $\vec{v}(3; 2; 6)$ et $\vec{w}(-7; 10; -8)$

8 Exercice de recherche

Exercice 8: Exercice de recherche

Soit $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base de l'espace.

On donne $\vec{u} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$, où a et b sont deux nombres réels.
Déterminer a et b tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

9 Trois vecteurs forment-ils une base de l'espace ?

Exercice 9: Trois vecteurs forment-ils une base de l'espace ?

Soit $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base de l'espace.

On donne $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{k}$ et $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment-ils une base de l'espace ?

Feuille 4 – Vers le supérieur

10 Une base de l'espace des polynômes de degré au plus 2

Exercice 10: Une base de l'espace des polynômes de degré au plus 2

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à deux. Toute fonction de $\mathcal{F}$ s'écrit sous la forme $ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont des réels.

À chaque fonction f de $\mathcal{F}$, on associe le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On considère :

— $f_1(x) = x^2 + x + 1$ et son vecteur associé $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

— $f_2(x) = x^2 - x + 1$ et son vecteur associé $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

— $f_3(x) = x^2$ et son vecteur associé $\vec{v}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ sont linéairement indépendants. En déduire que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de l'espace.
2. Soient f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 + x - 1$ et $\vec{v}$ son vecteur associé.
 - a) Justifier que $\vec{v}$ s'exprime de manière unique en fonction de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$.
 - b) Déterminer les réels r , s et t tels que $f(x) = r f_1(x) + s f_2(x) + t f_3(x)$.

Indication

Dire que trois vecteurs sont **linéairement indépendants** est, dans l'enseignement supérieur, la façon de dire qu'ils ne sont pas coplanaires.

On utilisera donc le critère du cours : $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que $\vec{v}_3 = a \vec{v}_1 + b \vec{v}_2$. Il s'agit donc de montrer que le système correspondant **n'admet pas de solution**.