Fiche de cours – Vecteurs, droites et plans de l'espace

Mathématiques – Terminale – Enseignement de spécialité

L'essentiel à connaître

1 Vecteurs de l'espace

Définition 1.1: Vecteurs et combinaisons linéaires

— Un vecteur de l'espace est défini par une **direction**, un **sens** et une **norme**. M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ si et seulement si $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
— Tout vecteur de la forme $a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{w}$ (a, b, c réels) est une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Remarque : Comme dans le plan

Somme, produit par un réel, **relation de Chasles**, colinéarité : toutes les règles du calcul vectoriel plan restent valables. Pour exprimer un vecteur en fonction d'autres, on construit un **chemin** de l'origine à l'extrémité avec la relation de Chasles.

2 Droites et plans de l'espace

Propriété 2.1: Droites

— Un **vecteur directeur** de la droite d est un vecteur non nul ayant la même direction que d.
— d passe par A, de vecteur directeur $\vec{u}$: $M \in d \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont **colinéaires**.
— Deux droites sont **parallèles** $\iff$ leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Propriété 2.2: Plans

— Deux vecteurs **non nuls et non colinéaires** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ déterminent la direction d'un plan ; un plan est entièrement déterminé par **un point et deux vecteurs non colinéaires**.
— P passe par A, dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires : $M \in P \iff$ il existe deux réels x, y tels que $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$.
— Deux plans dirigés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont **parallèles**.

Méthode 2.3: Démontrer que deux plans sont parallèles

Il suffit de trouver **deux vecteurs non colinéaires de l'un** qui soient respectivement **colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l'autre**.
Exemple : dans une pyramide $SABC$, avec I, J, K milieux de $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$: $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, donc $(IJK) \parallel (ABC)$.

3 Positions relatives

Deux droites	**coplanaires** (contenues dans un même plan) : **sécantes**, **strictement parallèles** ou **confondues** ; ou **non coplanaires** (aucun plan ne les contient toutes les deux).
Deux plans	**sécants** (leur intersection est une droite) ou **parallèles** (strictement parallèles ou confondus).
Une droite et un plan	**sécants** (en un point) ou **parallèles** (la droite est **incluse** dans le plan ou **strictement parallèle** au plan).

Remarque : Attention

Dans l'espace, deux droites qui ne se coupent pas ne sont **pas forcément parallèles** : elles peuvent être non coplanaires. *Exemple dans un cube $ABCDEFGH$:* (AD) et (CG).

4 Bases et repères de l'espace

Définition 4.1: Vecteurs coplanaires

Trois vecteurs sont **coplanaires** s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.
Caractérisation : si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont **pas colinéaires**, alors $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires $\iff$ il existe $(x\,;y)$ tel que $\vec{u} = x\,\vec{v} + y\,\vec{w}$.

Théorème 4.2: Base de l'espace

Trois vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ **non coplanaires** forment une **base** $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ de l'espace : pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un **unique** triplet $(x\,;y\,;z)$ tel que

$$\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}.$$

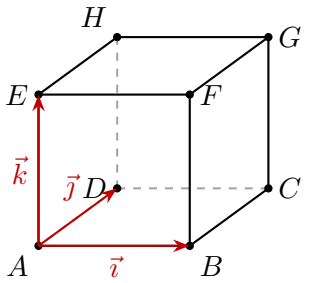
Avec un point O, on obtient un **repère** $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$; les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ du point M sont celles de $\overrightarrow{OM}$: **abscisse**, **ordonnée**, **cote**.

Propriété 4.3: Calculs en coordonnées

Pour $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$:

— $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$; milieu de $[AB]$: $\begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B}{2} \\ \frac{y_A+y_B}{2} \\ \frac{z_A+z_B}{2} \end{pmatrix}$;

— $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** $\iff$ leurs coordonnées sont **proportionnelles** $(\vec{v} = k\,\vec{u})$.



Repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$:
$G(1\,;1\,;1)$, $H(0\,;1\,;1)\ldots$

5 Méthodes essentielles

Méthode 5.1: Alignement, appartenance, coplanarité de points

— A, B, C **alignés** $\iff$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires (on peut décomposer les deux vecteurs dans une même base et comparer).
— A, B, C, D **coplanaires** $\iff$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ (**même origine** A) coplanaires, c'est-à-dire $\overrightarrow{AD} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$.

Méthode 5.2: Étudier la coplanarité de trois vecteurs avec des coordonnées

1. **Vérifier** que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles).
2. **Écrire** $\vec{u} = x\,\vec{v} + y\,\vec{w}$ coordonnée par coordonnée : système de **3 équations à 2 inconnues** (L_1), (L_2), (L_3).
3. **Résoudre** avec les deux équations les plus simples :
   — par **substitution** si une inconnue a pour coefficient 1 ou -1 (isoler, substituer, résoudre, remonter) ;
   — par **combinaison** sinon (rendre les coefficients d'une inconnue opposés ou égaux, puis additionner ou soustraire ; noter $a\,(L_1) + b\,(L_2)$).
4. **Vérifier** le couple trouvé dans la troisième équation : c'est cette vérification qui décide !
5. **Conclure :** vérifiée $\Rightarrow$ vecteurs **coplanaires** ; non vérifiée $\Rightarrow$ pas de solution, vecteurs **non coplanaires** : ils forment une **base**.

Un système sans solution n'est pas une erreur de calcul : c'est la réponse.

Bilan

— **Alignement / parallélisme de droites** $\rightarrow$ **colinéarité** de deux vecteurs.
— **Point dans un plan / quatre points coplanaires / droite parallèle à un plan** $\rightarrow$ **coplanarité** de trois vecteurs (combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires).
— **Base de l'espace** $\rightarrow$ trois vecteurs **non coplanaires** ; décomposition **unique**.
— **Avec des coordonnées** : la géométrie devient du calcul (système à résoudre, coordonnées à comparer).