Fiche méthode – Résoudre un système d'équations

Mathématiques – Terminale – Enseignement de spécialité

Substitution et combinaison : 2 inconnues, 3 équations / 3 inconnues

Table des matières

1 Vocabulaire et règles de base **1**

2 Deux équations, deux inconnues **2**
2.1 Méthode par substitution 2
2.2 Méthode par combinaison 2

3 Trois équations, deux inconnues **3**

4 Trois équations, trois inconnues **4**
4.1 Méthode par substitution 4
4.2 Méthode par combinaison (méthode du pivot) 5
4.3 Quand il n'y a pas une unique solution 6

5 Récapitulatif **6**

1 Vocabulaire et règles de base

Définition 1.1: Système, solution

— Un **système** est un ensemble d'équations que les inconnues doivent vérifier **simultanément**. On numérote les lignes (L_1), (L_2), $(L_3)\ldots$
— Une **solution** est un couple $(x\,;y)$ (ou un triplet $(x\,;y\,;z)$) qui vérifie **toutes** les équations à la fois.
— Résoudre un système, c'est trouver **toutes** ses solutions : il peut en avoir **une seule**, **aucune** ou **une infinité**.

Propriété 1.2: Opérations autorisées

On obtient un système **équivalent** (qui a exactement les mêmes solutions) lorsque :
— on remplace une inconnue par son expression tirée d'une autre ligne (**substitution**) ;
— on multiplie une ligne par un réel **non nul** ;
— on remplace une ligne (L_i) par $a\,(L_i) + b\,(L_j)$, avec $a \neq 0$ et $j \neq i$ (**combinaison**).

Remarque : Deux règles de présentation qui évitent les erreurs

— **Garder toujours le même nombre de lignes** : un système de trois équations reste un système de trois équations jusqu'à la fin. Recopier à chaque étape les lignes inchangées.
— **Écrire l'opération effectuée** à droite de chaque ligne modifiée, par exemple $(L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_1)$. Le calcul devient relisible et vérifiable.

Piège classique : remplacer (L_1) par $(L_1) + (L_2)$ **et** (L_2) par $(L_1) + (L_2)$ fait perdre une équation. Chaque nouvelle ligne doit contenir la ligne qu'elle remplace ($a \neq 0$).

2 Deux équations, deux inconnues

2.1 Méthode par substitution

Méthode 2.1: Résoudre par substitution

1. **Choisir** une équation et une inconnue faciles à isoler : de préférence une inconnue de coefficient 1 ou -1 (pas de fraction).
2. **Isoler** cette inconnue : on obtient une ligne du type $y = \dots$, qui ne contient plus que l'autre inconnue.
3. **Substituer** : remplacer l'inconnue isolée par cette expression dans l'*autre* équation, qui ne contient alors plus qu'une inconnue.
4. **Résoudre** cette équation à une inconnue.
5. **Remonter** : reporter la valeur trouvée dans la ligne de l'étape 2.
6. **Vérifier** le couple dans les deux équations de départ.

Exemple 2.2: Substitution pas à pas

Résoudre $\begin{cases} 2x + y = 7 & (L_1) \\ 3x - 2y = 0 & (L_2) \end{cases}$

Étape 1. Dans (L_1), y a pour coefficient 1 : on isole y.

Étape 2. $\begin{cases} y = 7 - 2x \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

Étape 3. On remplace y par $7 - 2x$ dans (L_2) : $\begin{cases} y = 7 - 2x \\ 3x - 2(7 - 2x) = 0 \end{cases}$

Étape 4. $3x - 14 + 4x = 0 \iff 7x = 14 \iff x = 2$.

Étape 5. $y = 7 - 2 \times 2 = 3$.

Étape 6. $(L_1) : 2 \times 2 + 3 = 7$ ✓ $\quad (L_2) : 3 \times 2 - 2 \times 3 = 0$ ✓

Conclusion. Le système a une unique solution : $(x\,;y) = (2\,;3)$.

2.2 Méthode par combinaison

Méthode 2.3: Résoudre par combinaison

1. **Choisir** l'inconnue à éliminer.
2. **Multiplier** les deux lignes par des nombres bien choisis pour que les coefficients de cette inconnue deviennent **opposés** (on additionnera) ou **égaux** (on soustraira). Astuce : multiplier chaque ligne par le coefficient de l'inconnue dans l'*autre* ligne.
3. **Combiner** membre à membre : l'inconnue disparaît.
4. **Résoudre** l'équation à une inconnue obtenue.
5. **Recommencer** avec l'autre inconnue, ou reporter la valeur trouvée dans une équation de départ.
6. **Vérifier**.

Exemple 2.4: Combinaison pas à pas

Résoudre $\begin{cases} 5x + 3y = 1 & (L_1) \\ 2x - 7y = -16 & (L_2) \end{cases}$

Aucun coefficient ne vaut 1 ou -1 : isoler une inconnue ferait apparaître des fractions. On choisit la **combinaison**.

Éliminer x. Les coefficients de x sont 5 et 2. On multiplie (L_1) par 2 et (L_2) par 5 : ils

deviennent **égaux**, on soustrait.

$$\begin{cases} 10x + 6y = 2 & 2\,(L_1) \\ 10x - 35y = -80 & 5\,(L_2) \end{cases}$$

$$2(L_1) - 5(L_2) : \quad (10x + 6y) - (10x - 35y) = 2 - (-80)$$

d'où $41y = 82 \iff y = 2$.

Éliminer y. Les coefficients de y sont 3 et -7. On multiplie (L_1) par 7 et (L_2) par 3 : ils deviennent 21 et -21, **opposés**, on additionne.

$$7(L_1) + 3(L_2) : \quad (35x + 21y) + (6x - 21y) = 7 + (-48)$$

d'où $41x = -41 \iff x = -1$.

Vérification. $(L_1) : 5 \times (-1) + 3 \times 2 = 1$ ✓ $\quad (L_2) : 2 \times (-1) - 7 \times 2 = -16$ ✓
Conclusion. Unique solution : $(x\,;y) = (-1\,;2)$.

Remarque : Quelle méthode choisir ?

— Un coefficient vaut 1 ou -1 ⇒ **substitution** (rapide, sans fraction).
— Aucun coefficient simple ⇒ **combinaison** (on ne manipule que des entiers ; les deux inconnues s'obtiennent par le même procédé).

3 Trois équations, deux inconnues

Ce type de système apparaît pour étudier la **coplanarité** de trois vecteurs : chercher x et y tels que $\vec{u} = x\,\vec{v} + y\,\vec{w}$ donne une équation par coordonnée, soit **trois équations pour deux inconnues**. Il y a une équation « de trop » : c'est elle qui décide de la conclusion.

Méthode 3.1: Résoudre un système de 3 équations à 2 inconnues

1. **Mettre de côté** l'équation la plus compliquée.
2. **Résoudre** le système formé par les deux autres (substitution ou combinaison, partie 2) : on obtient **au plus un** couple $(x\,;y)$.
3. **Vérifier** ce couple dans l'équation mise de côté :
   — si elle est vérifiée, le couple est **l'unique solution** du système ;
   — sinon, le système n'a **aucune solution**.

Cette vérification n'est pas une simple précaution : sans elle, on ne peut rien conclure.

Exemple 3.2: Un système qui a une solution

On cherche x et y tels que $\vec{u} = x\,\vec{v} + y\,\vec{w}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\6\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 & (L_1) \\ x - 3y = 6 & (L_2) \\ -x + 2y = -5 & (L_3) \end{cases}$$

Étape 1. On met (L_3) de côté et on résout avec (L_1) et (L_2).
Étape 2 (substitution). Dans (L_2), x a pour coefficient 1 : $x = 6 + 3y$. On substitue dans (L_1) :

$$2(6 + 3y) + y = 5 \iff 12 + 7y = 5 \iff 7y = -7 \iff y = -1.$$

Puis

$$x = 6 + 3 \times (-1) = 3.$$

Étape 3. Vérification dans (L_3) : $-3 + 2 \times (-1) = -5$ ✓
Conclusion. Le système a pour unique solution $(3\,;-1)$: $\vec{u} = 3\,\vec{v} - \vec{w}$, les trois vecteurs sont **coplanaires**.

Exemple 3.3: Un système qui n'a pas de solution

Même question avec $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ (seule la dernière coordonnée change) :

$$\begin{cases} 2x + y = 5 & (L_1) \\ x - 3y = 6 & (L_2) \\ -x + 2y = -4 & (L_3) \end{cases}$$

Les lignes (L_1) et (L_2) n'ont pas changé : elles imposent encore $x = 3$ et $y = -1$.
Vérification dans (L_3) : $-3 + 2 \times (-1) = -5 \neq -4$. La vérification **échoue**.
Conclusion. Aucun couple ne vérifie les trois équations : le système n'a **pas de solution**.
Les vecteurs ne sont **pas coplanaires** : ils forment une base de l'espace.

4 Trois équations, trois inconnues

Ce type de système apparaît par exemple pour **décomposer un vecteur dans une base** : chercher x, y, z tels que $\vec{s} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v} + z\,\vec{t}$. L'idée est toujours la même : **faire disparaître les inconnues une par une** pour se ramener à un système plus petit.

4.1 Méthode par substitution

Méthode 4.1: Résoudre un système 3×3 par substitution

1. **Isoler** une inconnue (de coefficient 1 ou -1 si possible) dans l'une des équations.
2. **Substituer** son expression dans les **deux** autres équations : elles ne contiennent plus que deux inconnues.
3. **Résoudre** ce système de deux équations à deux inconnues (partie 2).
4. **Remonter** : calculer la troisième inconnue grâce à la ligne de l'étape 1.
5. **Vérifier** le triplet dans les **trois** équations de départ.

Exemple 4.2: Substitution pas à pas

Résoudre $\begin{cases} x + y + z = 6 & (L_1) \\ 2x - y + z = 3 & (L_2) \\ x + 2y - z = 2 & (L_3) \end{cases}$

Étape 1 – isoler z dans (L_1) (coefficient 1) : $z = 6 - x - y$.

$$\begin{cases} z = 6 - x - y \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Étape 2 – substituer dans (L_2) et (L_3).

$$\begin{cases} z = 6 - x - y \\ 2x - y + (6 - x - y) = 3 \\ x + 2y - (6 - x - y) = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 6 - x - y \\ x - 2y = -3 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

Attention aux parenthèses : $-(6 - x - y) = -6 + x + y$.

Étape 3 – résoudre le système 2×2 formé des deux dernières lignes. Dans $x - 2y = -3$, on isole $x = -3 + 2y$, puis on substitue :

$$2(-3 + 2y) + 3y = 8 \iff -6 + 7y = 8 \iff 7y = 14 \iff y = 2.$$

Puis

$$x = -3 + 2 \times 2 = 1.$$

Étape 4 – remonter. $z = 6 - 1 - 2 = 3$.
Étape 5 – vérifier. $(L_1) : 1 + 2 + 3 = 6$ ✓ $(L_2) : 2 - 2 + 3 = 3$ ✓ $(L_3) : 1 + 4 - 3 = 2$ ✓
Conclusion. Unique solution : $(x\,;y\,;z) = (1\,;2\,;3)$.

4.2 Méthode par combinaison (méthode du pivot)

Méthode 4.3: Résoudre un système 3×3 par combinaison

1. **Choisir une ligne pivot**, par exemple (L_1), de préférence avec un coefficient 1 devant x. On la **garde telle quelle**.
2. **Éliminer x des deux autres lignes** en les combinant avec le pivot : $(L_2) \leftarrow (L_2) - a\,(L_1)$ et $(L_3) \leftarrow (L_3) - b\,(L_1)$, avec a et b bien choisis.
3. Dans les deux nouvelles lignes (qui ne contiennent plus que y et z), **éliminer** y de l'une d'elles par une nouvelle combinaison.
4. On obtient un système **triangulaire** : la dernière ligne ne contient plus que z.
5. **Remonter** : calculer z, puis y, puis x.
6. **Vérifier** dans les trois équations de départ.

Exemple 4.4: Combinaison pas à pas : décomposer un vecteur dans une base

On veut écrire $\vec{s}\begin{pmatrix}3\\8\\3\end{pmatrix}$ sous la forme $x\,\vec{u} + y\,\vec{v} + z\,\vec{t}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{t}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 & (L_1) \\ 2x - y + z = 8 & (L_2) \\ -x + y + 2z = 3 & (L_3) \end{cases}$$

Étape 1 – pivot. (L_1) a pour coefficient 1 devant x : c'est le pivot, on le garde.

Étape 2 – éliminer x de (L_2) et (L_3).
— $(L_2) - 2(L_1) : (2x - y + z) - (2x + 4y + 2z) = 8 - 6$, soit $-5y - z = 2$;
— $(L_3) + (L_1) : (-x + y + 2z) + (x + 2y + z) = 3 + 3$, soit $3y + 3z = 6$, que l'on simplifie par 3 : $y + z = 2$.

$$\begin{cases} x+2y+z=3 & (L_1) \\ -5y-z=2 & (L_2) \leftarrow (L_2)-2(L_1) \\ y+z=2 & (L_3) \leftarrow \frac{1}{3}\left[(L_3)+(L_1)\right] \end{cases}$$

Étape 3 – éliminer y de la dernière ligne. Les coefficients de y sont -5 et 1 : on calcule $(L_2)+5(L_3)$.

$$(-5y-z)+(5y+5z)=2+10 \iff 4z=12.$$

Étape 4 – système triangulaire.

$$\begin{cases} x+2y+z=3 & (L_1) \\ -5y-z=2 & (L_2) \\ 4z=12 & (L_3) \leftarrow (L_2)+5(L_3) \end{cases}$$

Étape 5 – remonter. $4z=12 \iff z=3$; $-5y-3=2 \iff -5y=5 \iff y=-1$; $x+2\times(-1)+3=3 \iff x=2$.
Étape 6 – vérifier. $(L_1) : 2-2+3=3$ ✓ $(L_2) : 4+1+3=8$ ✓ $(L_3) : -2-1+6=3$ ✓
Conclusion. $(x\,;y\,;z)=(2\,;-1\,;3)$, c'est-à-dire $\vec{s}=2\,\vec{u}-\vec{v}+3\,\vec{t}$.

4.3 Quand il n'y a pas une unique solution

Remarque : Repérer les cas particuliers

Au cours de la résolution, une ligne peut **perdre toutes ses inconnues** :
— on obtient une égalité **fausse** du type $0=1$: le système n'a **aucune solution** ;
— on obtient une égalité **toujours vraie** $0=0$: la ligne n'apporte aucune information, le système a en général une **infinité de solutions**.

Exemple : avec $(L_1) : x+y+z=1$, $(L_2) : x-y+z=3$ et $(L_3) : 2x+2z=5$, le calcul $(L_1)+(L_2)-(L_3)$ donne $0=4-5=-1$: **aucune solution**. Si l'on avait eu $(L_3) : 2x+2z=4$, on aurait obtenu $0=0$: **infinité de solutions**.

Lorsque l'on décompose un vecteur dans une **base**, la solution existe toujours et elle est **unique** : obtenir $0=1$ signale alors une erreur de calcul (ou des vecteurs qui ne forment pas une base).

5 Récapitulatif

Bilan

— **Substitution** : isoler une inconnue (coefficient ±1), la remplacer dans les autres lignes, résoudre, remonter.
— **Combinaison** : rendre les coefficients d'une inconnue égaux ou opposés, soustraire ou additionner ; pour 3×3, garder un pivot et rendre le système triangulaire.
— **3 équations, 2 inconnues** : résoudre avec deux lignes, **vérifier dans la troisième** ; si elle est fausse, pas de solution.
— **3 équations, 3 inconnues** : se ramener à 2×2, puis à une seule inconnue ; remonter.
— **Toujours** : garder le même nombre de lignes, noter les opérations, **vérifier** la solution dans **toutes** les équations de départ.