

Exercice 3**5 points**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Soit n un entier naturel.

Recopier et compléter la fonction `suite_u` d'argument `n` ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de u_n .

```
def suite_u(n) :  
    u = ...  
    for i in range(1,n+1) :  
        |   u = ...  
    return u
```

3.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2n$.
 - b. En déduire la limite de la suite (u_n) .
 - c. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel n vérifiant, $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$?
4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
5. On considère la suite (v_n) , définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 2n + 1$.
 - a. En dessous de la fonction `suite_u` précédente, on a écrit la fonction `suite_v` ci-dessous :

```
def suite_v(n):  
    L = []  
    for i in range(n+1) :  
        |   L.append(suite_u(i) - 2*i + 1)  
    return L
```

La commande « `L.append` » permet de rajouter, en dernière position, un élément dans la liste `L`.

Lorsqu'on saisit `suite_v(5)` dans la console, on obtient l'affichage suivant :

```
>>> suite_v(5)  
[1, 5, 25, 125, 625, 3125]
```

Conjecturer, pour tout entier naturel n , l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n .
Démontrer cette conjecture.

- b. En déduire, pour tout entier naturel n , la forme explicite de u_n en fonction de n .