

Supposons qu'il existe un entier k tel que 2^k est divisible par 3.
 $2^{k+1} = 2^k \times 2 = 3p \times 2$, où p est un entier (d'après l'hypothèse de récurrence).
 $= 6p$

Donc 2^{k+1} est divisible par 3. L'hérédité est vérifiée et pourtant la propriété n'est jamais vraie.

II. Limite finie ou infinie d'une suite

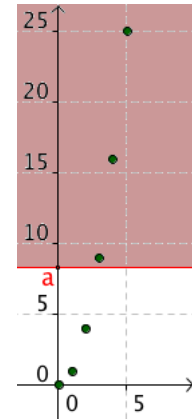
1) Limite infinie

Exemple :

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$.

En effet, les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on souhaite à partir d'un certain rang.

Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



Définitions : - On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle $]a ; +\infty[$, a réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle $]-\infty ; b[$, b réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un nombre réel A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = 4u_n$.

Cette suite est croissante et admet pour limite $+\infty$.

Voici un algorithme écrit en langage naturel :

Langage naturel
Définir fonction seuil(A)
$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 2$
Tant que $u < A$
$n \leftarrow n + 1$
$u \leftarrow 4u$
Fin Tant que
Afficher n

En appliquant cet algorithme avec $A = 100$, on obtient en sortie $n = 3$.

A partir du terme u_3 , les termes de la suite dépassent 100.

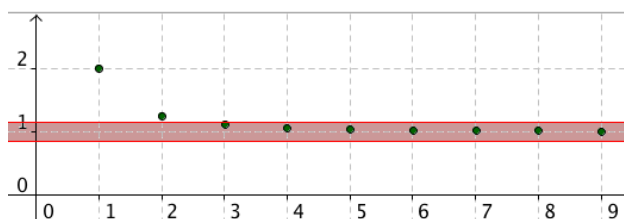
En langage calculatrice et Python, cela donne :

TI	CASIO	Python
<pre>PROGRAM:SEUIL :Input A :0→N :2→U :While U<A :N+1→N :4*U→U :End :Disp N</pre>	<pre>=====SEUIL "A="?→A 0→N 2→U While U<A N+1→N 4×U→U WhileEnd N</pre>	<pre>def seuil(a): n=0 u=2 while u<a: n=n+1 u=4*u return(n)</pre>

2) Limite finie

Exemple : La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ a pour limite 1.

En effet, les termes de la suite se resserrent autour de 1 à partir d'un certain rang. Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 1, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.



Définition : On dit que la suite (u_n) admet pour limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L.$$

Une telle suite est dite **convergente**.

Définition : Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Remarque :

Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie.

Par exemple, la suite de terme générale $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1 . Elle n'admet donc pas de limite finie, ni infinie. Elle est donc divergente.

3) Limites des suites usuelles

Propriétés :

$$\begin{aligned} & - \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty. \\ & - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0. \end{aligned}$$

Démonstration de : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Soit un intervalle quelconque ouvert $] -a ; a[$, a réel positif non nul, contenant 0.

Pour tout n , tel que : $n > \frac{1}{a}$, on a : $0 < \frac{1}{n} < a$ et donc $\frac{1}{n} \in] -a ; a[$

Ainsi, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $] -a ; a[$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

III. Opérations sur les limites

1) Limite d'une somme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

Exemple : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + n = ?$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

D'après la règle sur la limite d'une somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + n = +\infty$

2) Limite d'un produit

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	L	∞	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	L'	∞	∞	∞
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n =$	$L L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1 \right) (n^2 + 3) = ?$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1 \right) = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 3) = +\infty$$

D'après la règle sur la limite d'un produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1 \right) (n^2 + 3) = +\infty$

3) Limite d'un quotient

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{-n^2-3} = ?$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 - 3 = -\infty$

D'après la règle sur la limite d'un quotient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{-n^2-3} = 0$

Remarque :

Tous ces résultats sont intuitifs. On retrouve par exemple, un principe sur les opérations de limite semblable à la règle des signes établie sur les nombres relatifs. Il est important cependant de reconnaître les formes indéterminées pour lesquelles il faudra utiliser des calculs algébriques afin de lever l'indétermination ou utiliser d'autres propriétés sur les calculs de limites.

Les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

" $\infty - \infty$ ", " $0 \times \infty$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ " et " $\frac{0}{0}$ ".

Méthode : Lever une indétermination

Déterminer les limites suivantes :

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3\sqrt{n}$ c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n}$
d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2+n}{n+3}$ e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

a) • $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -5n + 1 = -\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

• Levons l'indétermination en **factorisant par le monôme de plus haut degré** :

$$n^2 - 5n + 1 = n^2 \left(1 - \frac{5n}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) = n^2 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

• Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} = 1$ par limite d'une somme.

Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = +\infty$ par limite d'un produit.

Soit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1 = +\infty$.

b) • $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3\sqrt{n} = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

• Levons l'indétermination :

$$n - 3\sqrt{n} = n \left(1 - \frac{3\sqrt{n}}{n} \right) = n \left(1 - \frac{3(\sqrt{n})^2}{n\sqrt{n}} \right) = n \left(1 - \frac{3}{\sqrt{n}} \right)$$

• Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{\sqrt{n}} = 1$ donc par limite d'un produit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{3}{\sqrt{n}} \right) = +\infty$$

Soit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3\sqrt{n} = +\infty$

c) • $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5n^2 + 4 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^2 + 3n = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

• Levons l'indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur par le monôme de plus haut degré :

$$\frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3n} = \frac{n^2}{n^2} \times \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3n}{n^2}} = \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}}$$

• Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^2} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 + \frac{4}{n^2} = 5$ par limite d'une somme.

On prouve de même que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + \frac{3}{n} = 4$.

Donc, par limite d'un quotient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}} = \frac{5}{4}$.

Et donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3n} = \frac{5}{4}$.

d) • $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^2 + n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 3 = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

• Levons l'indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur par le monôme de plus haut degré :

$$\frac{3n^2 + n}{n + 3} = \frac{n^2}{n} \times \frac{3 + \frac{n}{n^2}}{1 + \frac{3}{n}} = n \times \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}}$$

• Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{n} = 3$ par limite d'une somme.

On prouve de même que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{n} = 1$.

Donc, par limite d'un quotient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = 3$.

Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \times \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = +\infty$ par limite d'un produit.

Soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + n}{n + 3} = +\infty$.

e) • $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n + 2} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

• Levons l'indétermination par la méthode de l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} \sqrt{n + 2} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n + 2} - \sqrt{n})(\sqrt{n + 2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n + 2} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(\sqrt{n + 2})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n + 2} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n + 2 - n}{\sqrt{n + 2} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n + 2} + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

• Or par limite d'une somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n + 2} + \sqrt{n} = +\infty$

Et donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n + 2} + \sqrt{n}} = 0$ par limite d'un quotient.

Soit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n + 2} - \sqrt{n} = 0$.

LES SUITES (Chapitre 2/2)

I. Limites et comparaison

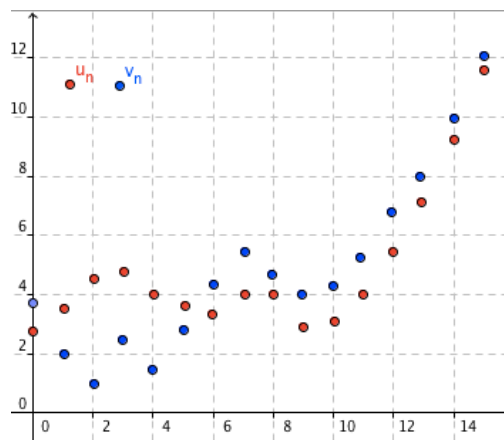
1) Théorèmes de comparaison

Théorème 1 :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Par abus de langage, on pourrait dire que la suite (u_n) pousse la suite (v_n) vers $+\infty$ à partir d'un certain rang.



Démonstration au programme :

Soit un nombre réel a .

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, donc l'intervalle $]a ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_1 .

On a donc pour tout $n \geq n_1$, $a < u_n$.

- A partir d'un certain rang, que l'on note n_2 , on a $u_n \leq v_n$.

- Ainsi pour tout $n \geq \max(n_1 ; n_2)$, on a : $a < u_n \leq v_n$.

On en déduit que l'intervalle $]a ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (v_n) à partir du rang $\max(n_1 ; n_2)$.

Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Théorème 2 :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

Méthode : Déterminer une limite par comparaison

Déterminer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + (-1)^n$

$(-1)^n \geq -1$ donc $n^2 + (-1)^n \geq n^2 - 1$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 1 = +\infty$ donc par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + (-1)^n = +\infty$.

2) Théorème d'encadrement

Théorème des gendarmes :

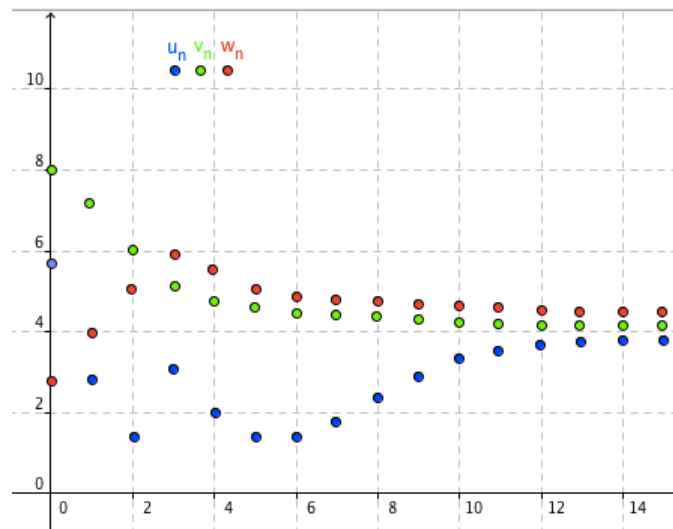
Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$ alors

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$.

Par abus de langage, on pourrait dire que les suites (u_n) et (w_n) (les gendarmes) se resserrent autour de la suite (v_n) à partir d'un certain rang pour la faire converger vers la même limite.

Ce théorème est également appelé le **théorème du sandwich**.



Démonstration :

Soit un intervalle ouvert I contenant L .

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_1 .

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_2 .
 - A partir d'un certain rang, que l'on note n_3 , on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.
 - Ainsi pour tout $n \geq \max(n_1; n_2; n_3)$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (v_n) .
- Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$.

Méthode : Déterminer une limite par encadrement

Déterminer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin n}{n}$

On a : $-1 \leq \sin n \leq 1$, donc : $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin n}{n} = 1$.

II. Suites majorées, minorées, bornées

1) Définitions :

Définitions : - La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.

- La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.

- La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples :

- Les suites de terme général $\cos n$ ou $(-1)^n$ sont bornées car minorées par -1 et majorées par 1 .
- La suite de terme général n^2 est minorée par 0 .

Méthode : Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3 .

- **Initialisation :**

$$u_0 = 2 < 3$$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité :**

- Hypothèse de récurrence :

Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie : $u_k < 3$.

- Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k+1$: $u_{k+1} < 3$.

On a : $u_k < 3$ donc $\frac{1}{3} u_k < \frac{1}{3} \times 3$ et donc $\frac{1}{3} u_k + 2 < \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3$.

Soit : $u_{k+1} < 3$

- **Conclusion :**

La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n , soit : $u_n < 3$.

2) Convergence des suites monotones

Propriété : Soit (u_n) une suite croissante définie sur $\mathbb{N}$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ alors la suite (u_n) est majorée par L .

Démonstration par l'absurde :

Démontrons par l'absurde en supposant le contraire, soit : « Il existe un rang p , tel que $u_p > L$. »

- L'intervalle ouvert $]L - 1 ; u_p[$ contient L .

Or, par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$. Donc l'intervalle $]L - 1 ; u_p[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang (1).

- Comme (u_n) est croissante : $u_n \geq u_p$ pour $n > p$.

Donc si $n > p$, alors $u_n \notin]L - 1 ; u_p[$ (2).

(1) et (2) sont contradictoires, on en déduit qu'il n'existe pas $p \in \mathbb{N}$, tel que $u_p > L$.

Et donc la suite (u_n) est majorée par L .

Théorème de convergence monotone :

- Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.

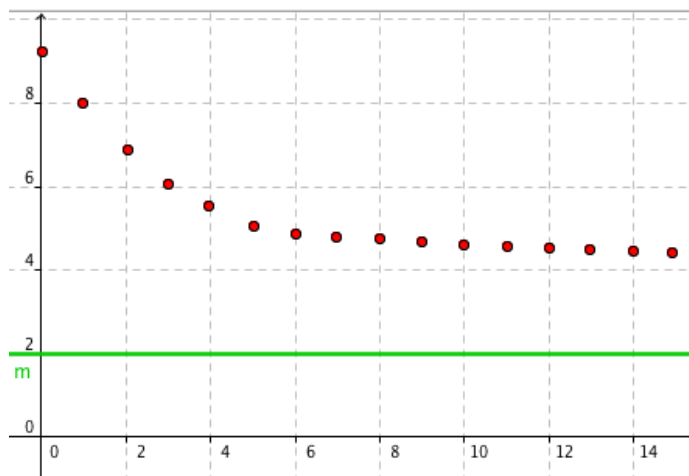
- Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.

- Admis -

Remarque :

Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.

Dans l'exemple ci-dessous, la suite décroissante est minorée par 2. Cela prouve que la limite de la suite est supérieure à 2 mais n'est pas nécessairement égale à 2.



Méthode : Utiliser le théorème de convergence monotone

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

Démontrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

- On a démontré dans le chapitre « LES SUITES (Partie 1) Paragraphe I. » que la suite (u_n) est croissante.

On a démontré dans la méthode précédente que la suite (u_n) est majorée par 3.

D'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

- On pose : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

Or $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}u_n + 2 = \frac{1}{3}L + 2$ par produit et somme de limites.

Une limite étant unique, on en déduit que $L = \frac{1}{3}L + 2$, soit $L = 3$.

La suite (u_n) converge donc vers 3.

Corollaire :

1) Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers $+\infty$.

2) Si une suite décroissante est non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration (du 1) au programme :

Soit un réel a .

Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un entier p tel que $u_p > a$.

La suite (u_n) est croissante donc pour tout $n > p$, on a : $u_n \geq u_p$.

Donc pour tout $n > p$, on a : $u_n > a$.

Et donc à partir d'un certain rang p , tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]a ; +\infty[$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

III. Comportement à l'infini d'une suite géométrique

1) Rappel

Définition : Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n , on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé la **raison** de la suite.

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = -3u_n$ et $u_0 = 5$ est une suite géométrique de raison -3 et de premier terme 5 .

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .
Pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

Exemple : Pour la suite précédente, on a, pour tout n : $u_n = 5 \times (-3)^n$.

2) Limites

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$	Pas de limite	0	1	$+\infty$

Démonstration au programme dans le cas $q > 1$:

Prérequis : Pour tout entier naturel n , on a : $(1 + a)^n \geq 1 + na$ (*inégalité de Bernoulli*), démontrée dans le chapitre « LES SUITES (Partie 1) Paragraphe I. ».

On suppose que $q > 1$, alors on peut poser $q = a + 1$ avec $a > 0$.

$q^n = (1 + a)^n \geq 1 + na$, d'après l'inégalité de Bernoulli.

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + na = +\infty$ car $a > 0$.

Donc d'après le théorème de comparaison : $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$.

Exemple :

La suite de terme général -5×4^n a pour limite $-\infty$ car $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n = +\infty$.

Méthode : Étudier un phénomène modélisable par une suite

Un investisseur dépose 5000 € sur un compte rémunéré à 3 % par an. Chaque année suivante, il dépose 300 € de plus sur ce compte.

On note (u_n) la somme épargnée à l'année n .

On a alors : $u_{n+1} = 1,03u_n + 300$ et $u_0 = 5000$.

- 1) Calculer u_1 et u_2 .
- 2) Prouver que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n + 10000$ est géométrique et donner sa raison et son premier terme.
- 3) Exprimer v_n en fonction de n .
- 4) En déduire u_n en fonction de n . Puis calculer u_{10} .
- 5) Étudier les variations de (u_n) .

$$1) u_1 = 1,03u_0 + 300 = 5450$$

$$u_2 = 1,03u_1 + 300 = 5913,5$$

$$2) v_{n+1} = u_{n+1} + 10000$$

$$= 1,03u_n + 300 + 10000$$

$$= 1,03u_n + 10300$$

$$= 1,03(v_n - 10000) + 10300, \text{ car } v_n = u_n + 10000$$

$$= 1,03v_n - 10300 + 10300$$

$$= 1,03v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme

$$v_0 = u_0 + 10000 = 5000 + 10000 = 15000.$$

$$3) \text{ Pour tout } n, v_n = 15000 \times 1,03^n.$$

$$4) \text{ Pour tout } n, u_n = v_n - 10000 = 15000 \times 1,03^n - 10000$$

$$\text{On a alors : } u_{10} = 15000 \times 1,03^{10} - 10000 \approx 10158,75$$

5) Pour tout n ,

$$u_{n+1} - u_n = 15000 \times 1,03^{n+1} - 10000 - (15000 \times 1,03^n - 10000)$$

$$= 15000 \times (1,03^{n+1} - 1,03^n)$$

$$= 15000 \times 1,03^n \times (1,03 - 1)$$

$$= 450 \times 1,03^n > 0$$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

3) Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Méthode : Utiliser la limite d'une suite géométrique

Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-2)^n}{3} \quad b) \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - 3^n \quad c) \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

a) $(-2)^n$ est une suite géométrique de raison -2 strictement inférieure à -1 .

Donc $(-2)^n$ ne possède pas de limite.

Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-2)^n}{3}$ n'existe pas.

$$b) \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

• Levons l'indétermination :

$$2^n - 3^n = 3^n \left(\frac{2^n}{3^n} - 1 \right) = 3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right)$$

• Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$, car $\left(\frac{2}{3} \right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ avec

$$-1 < \frac{2}{3} < 1.$$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 = -1.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ car 3^n est une suite géométrique de raison 3 strictement supérieure à 1.

$$\text{Donc par limite d'un produit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right) = -\infty$$

$$\text{Soit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - 3^n = -\infty.$$

c) On reconnaît les n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1. Donc :

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, comme limite d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ avec

$$-1 < \frac{1}{2} < 1.$$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1.$

Et donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2.$

Soit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2.$