Limites de suites

Mathématiques – Terminale – Enseignement de spécialité

Suites et limites

Table des matières

1 Limite finie ou infinie d'une suite **1**
1.1 Limite infinie . . . 1
1.2 Limite finie . . . 2
1.3 Limites des suites usuelles . . . 3

2 Opérations sur les limites **3**
2.1 Limite d'une somme . . . 3
2.2 Limite d'un produit . . . 4
2.3 Limite d'un quotient . . . 4

3 Limites et comparaison **6**
3.1 Théorèmes de comparaison . . . 6
3.2 Théorème d'encadrement . . . 7

4 Suites majorées, minorées, bornées **8**
4.1 Définitions . . . 8
4.2 Convergence des suites monotones . . . 9
4.3 Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$: théorème du point fixe . . . 11

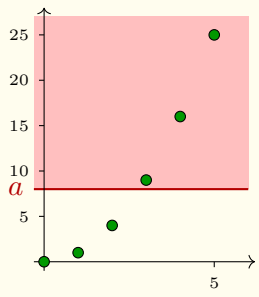
5 Comportement à l'infini d'une suite géométrique **12**
5.1 Rappel . . . 12
5.2 Limites . . . 13
5.3 Somme des termes d'une suite géométrique . . . 14

1 Limite finie ou infinie d'une suite

1.1 Limite infinie

Exemple 1.1: Une suite qui tend vers $+\infty$

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$.
En effet, les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on souhaite à partir d'un certain rang.
Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



Définition 1.2: Limite infinie

— On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle $]a\,;+\infty[$, a réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

— On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle $]-\infty\,;b[$, b réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

Méthode 1.3: Algorithme de seuil

Algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un nombre réel A.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = 4u_n$. Cette suite est croissante et admet pour limite $+\infty$.
Voici un algorithme écrit en langage naturel :

Définir fonction *seuil(A)*
  $n \leftarrow 0$;
  $u \leftarrow 2$;
  Tant que $u < A$ **faire**
    $n \leftarrow n + 1$;
    $u \leftarrow 4u$;
  Afficher n;

En appliquant cet algorithme avec $A = 100$, on obtient en sortie $n = 3$: à partir du terme u_3, les termes de la suite dépassent 100.
En langage calculatrice et Python, cela donne :

TI
```
PROGRAM:SEUIL
:Input A
:0→N
:2→U
:While U<A
:N+1→N
:4*U→U
:End
:Disp N
```

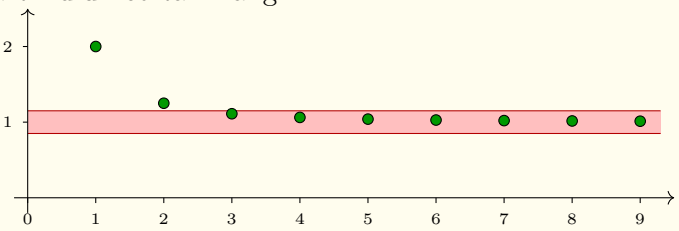
CASIO
```
=====SEUIL=====
"A="?→A
0→N
2→U
While U<A
N+1→N
4×U→U
WhileEnd
N
```

Python
```
1 def seuil(a):
2     n=0
3     u=2
4     while u<a:
5         n=n+1
6         u=4*u
7     return(n)
```

1.2 Limite finie

Exemple 1.4: Une suite qui tend vers 1

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$ a pour limite 1.
En effet, les termes de la suite se resserrent autour de 1 à partir d'un certain rang. Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 1, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.



Définition 1.5: Limite finie, suite convergente

On dit que la suite (u_n) admet pour limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L.$$

Une telle suite est dite **convergente**.

Définition 1.6: Suite divergente

Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Remarque

Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie.
Par exemple, la suite de terme général $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1. Elle n'admet donc pas de limite finie, ni infinie. Elle est donc divergente.

1.3 Limites des suites usuelles

Propriété 1.7: Limites des suites usuelles

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Démonstration de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Soit un intervalle ouvert quelconque $]-a\,;a[$, a réel strictement positif, contenant 0.

Pour tout n tel que $n > \dfrac{1}{a}$, on a : $0 < \dfrac{1}{n} < a$, et donc $\dfrac{1}{n} \in\,]-a\,;a[$.

Ainsi, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]-a\,;a[$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. □

2 Opérations sur les limites

2.1 Limite d'une somme

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.***

* **Forme indéterminée** : on ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

Exemple 2.1

$\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 + n) = ?$
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.
D'après la règle sur la limite d'une somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 + n) = +\infty$.

2.2 Limite d'un produit

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L \neq 0$	∞	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	∞	∞	∞
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n =$	LL'	∞	∞	**F.I.**

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple 2.2

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1\right)(n^2+3) = ?$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1\right) = 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2+3) = +\infty$.

D'après la règle sur la limite d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1\right)(n^2+3) = +\infty$.

2.3 Limite d'un quotient

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	0	∞	L'	∞	0
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{L}{L'}$	∞	0	∞	**F.I.**	**F.I.**

On applique la règle des signes pour déterminer si le quotient est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple 2.3

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{-n^2-3} = ?$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n^2) = -\infty$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n^2-3) = -\infty$.

D'après la règle sur la limite d'un quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{-n^2-3} = 0$.

Remarque

Tous ces résultats sont intuitifs. On retrouve par exemple un principe sur les opérations de limites semblable à la règle des signes établie sur les nombres relatifs.
Il est important cependant de reconnaître les formes indéterminées, pour lesquelles il faudra utiliser des calculs algébriques afin de lever l'indétermination, ou utiliser d'autres propriétés sur les calculs de limites.
Les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

« $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ ».

Méthode 2.4: Lever une indétermination

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 - 5n + 1)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n - 3\sqrt{n})$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^2+4}{4n^2+3n}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2+n}{n+3}$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$

Correction

a) • $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-5n+1) = -\infty$.
Il s'agit d'une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».
• Levons l'indétermination en **factorisant par le monôme de plus haut degré** :

$$n^2 - 5n + 1 = n^2\left(1 - \frac{5n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) = n^2\left(1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

• Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{5}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) = 1$ par limite d'une somme.
Et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(1 - \dfrac{5}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) = +\infty$ par limite d'un produit.
Soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 - 5n + 1) = +\infty$.

b) • $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\sqrt{n} = +\infty$.
Il s'agit d'une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».
• Levons l'indétermination :

$$n - 3\sqrt{n} = n\left(1 - \frac{3\sqrt{n}}{n}\right) = n\left(1 - \frac{3\sqrt{n}}{(\sqrt{n})^2}\right) = n\left(1 - \frac{3}{\sqrt{n}}\right).$$

• Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{3}{\sqrt{n}}\right) = 1$, donc par limite d'un produit :

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{3}{\sqrt{n}}\right) = +\infty.$$

Soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n - 3\sqrt{n}) = +\infty$.

c) • $\lim\limits_{n\to+\infty} (5n^2+4) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (4n^2+3n) = +\infty$.
Il s'agit d'une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».
• Levons l'indétermination en **factorisant le numérateur et le dénominateur par le monôme de plus haut degré** :

$$\frac{5n^2+4}{4n^2+3n} = \frac{n^2}{n^2} \times \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3n}{n^2}} = \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}}.$$

• Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n^2} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(5 + \dfrac{4}{n^2}\right) = 5$ par limite d'une somme.
On prouve de même que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(4 + \dfrac{3}{n}\right) = 4$.
Donc, par limite d'un quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}} = \dfrac{5}{4}$.
Et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^2+4}{4n^2+3n} = \dfrac{5}{4}$.

d) • $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3n^2+n\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+3)=+\infty$.

Il s'agit d'une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

• Levons l'indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur par le monôme de plus haut degré :

$$\frac{3n^2+n}{n+3}=\frac{n^2}{n}\times\frac{3+\frac{n}{n^2}}{1+\frac{3}{n}}=n\times\frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}.$$

• Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\dfrac{1}{n}\right)=3$ par limite d'une somme.

On prouve de même que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)=1$.

Donc, par limite d'un quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}=3$.

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}n\times\dfrac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}=+\infty$ par limite d'un produit.

Soit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2+n}{n+3}=+\infty$.

e) • $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+2}=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$.

Il s'agit d'une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ».

• Levons l'indétermination par la méthode de l'**expression conjuguée** :

$$\begin{aligned}\sqrt{n+2}-\sqrt{n}&=\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\\&=\frac{\left(\sqrt{n+2}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\\&=\frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\\&=\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

• Or, par limite d'une somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)=+\infty$.

Et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=0$ par limite d'un quotient.

Soit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)=0$.

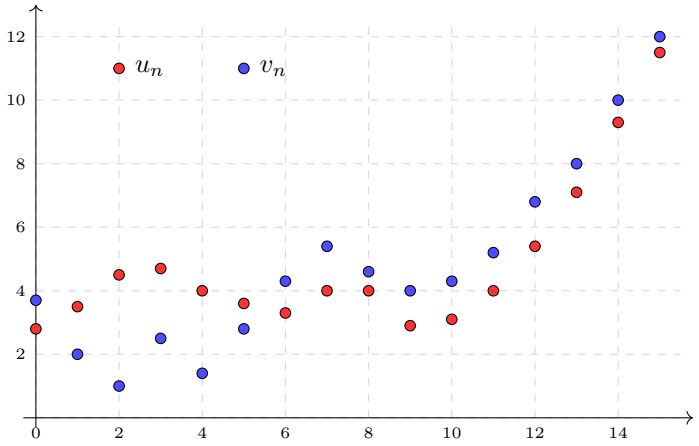
3 Limites et comparaison

3.1 Théorèmes de comparaison

Théorème 3.1: Théorème de comparaison (1)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n\leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$.

Par abus de langage, on pourrait dire que la suite (u_n) « pousse » la suite (v_n) vers $+\infty$ à partir d'un certain rang.



Démonstration au programme. Soit un nombre réel a.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, donc l'intervalle $]a\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang, que l'on note n_1. On a donc, pour tout $n \geqslant n_1$, $a < u_n$.
- À partir d'un certain rang, que l'on note n_2, on a $u_n \leqslant v_n$.
- Ainsi, pour tout $n \geqslant \max(n_1\,;n_2)$, on a : $a < u_n \leqslant v_n$.

On en déduit que l'intervalle $]a\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (v_n) à partir du rang $\max(n_1\,;n_2)$.

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. □

Théorème 3.2: Théorème de comparaison (2)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Méthode 3.3: Déterminer une limite par comparaison

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 + (-1)^n)$.

Correction

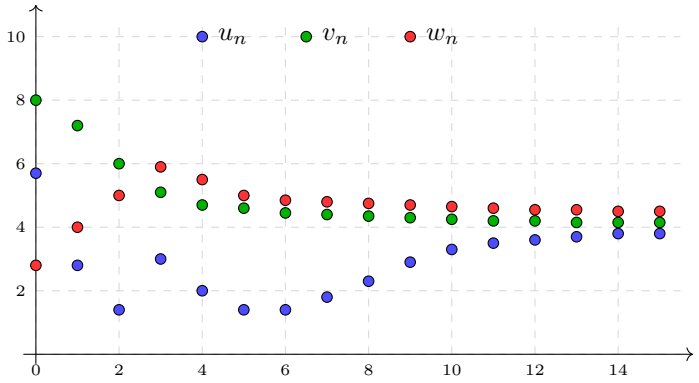
$(-1)^n \geqslant -1$, donc $n^2 + (-1)^n \geqslant n^2 - 1$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 - 1) = +\infty$, donc, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 + (-1)^n) = +\infty$.

3.2 Théorème d'encadrement

Théorème 3.4: Théorème des gendarmes

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$.

Par abus de langage, on pourrait dire que les suites (u_n) et (w_n) (les gendarmes) se resserrent autour de la suite (v_n) à partir d'un certain rang pour la faire converger vers la même limite. Ce théorème est également appelé le **théorème du sandwich**.



Démonstration. Soit un intervalle ouvert I contenant L.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang, que l'on note n_1.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite (w_n) à partir d'un certain rang, que l'on note n_2.
- À partir d'un certain rang, que l'on note n_3, on a $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
- Ainsi, pour tout $n \geqslant \max(n_1\,;n_2\,;n_3)$, u_n et w_n appartiennent à l'intervalle I, donc v_n, compris entre les deux, aussi : l'intervalle I contient tous les termes de la suite (v_n) à partir de ce rang.

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$. □

Méthode 3.5: Déterminer une limite par encadrement

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{\sin n}{n}\right)$.

Correction

On a : $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$, donc, pour $n \geqslant 1$: $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\sin n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{n} = 0$.

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{\sin n}{n}\right) = 1$.

4 Suites majorées, minorées, bornées

4.1 Définitions

Définition 4.1: Suites majorées, minorées, bornées

- La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.
- La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.
- La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple 4.2

- Les suites de terme général $\cos n$ ou $(-1)^n$ sont bornées car minorées par -1 et majorées par 1.
- La suite de terme général n^2 est minorée par 0.

Méthode 4.3: Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.
Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.

Correction

Pour tout entier naturel n, notons P_n la propriété : « $u_n < 3$ ».

- **Initialisation :** $u_0 = 2 < 3$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :**
  - Hypothèse de récurrence : supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie : $u_k < 3$.
  - Démontrons que la propriété est vraie au rang $k+1$: $u_{k+1} < 3$.

On a : $u_k < 3$, donc $\frac{1}{3}u_k < \frac{1}{3} \times 3$, et donc $\frac{1}{3}u_k + 2 < \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3$.
Soit : $u_{k+1} < 3$.

- **Conclusion :** la propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit : $u_n < 3$.

4.2 Convergence des suites monotones

Propriété 4.4

Soit (u_n) une suite croissante définie sur $\mathbb{N}$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$, alors la suite (u_n) est majorée par L.

Démonstration par l'absurde. Démontrons-le par l'absurde en supposant le contraire, soit : « il existe un rang p tel que $u_p > L$ ».

— L'intervalle ouvert $]L-1\,;u_p[$ contient L.
Or, par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$. Donc l'intervalle $]L-1\,;u_p[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang (1)

— Comme (u_n) est croissante : $u_n \geqslant u_p$ pour $n > p$.
Donc si $n > p$, alors $u_n \notin]L-1\,;u_p[$ (2)

(1) et (2) sont contradictoires : on en déduit qu'il n'existe pas de $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p > L$.

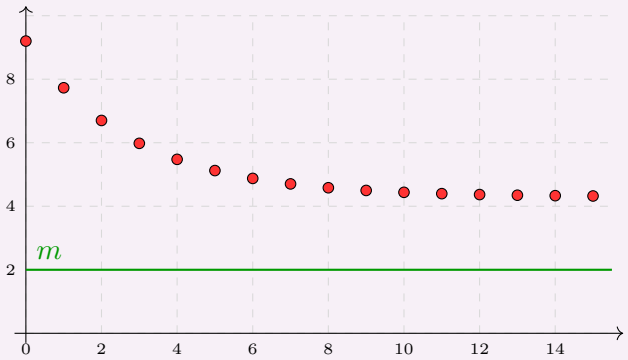
Et donc la suite (u_n) est majorée par L. □

Théorème 4.5: Théorème de convergence monotone (admis)

— Si une suite croissante est majorée, alors elle est convergente.
— Si une suite décroissante est minorée, alors elle est convergente.

Remarque

Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.
Dans l'exemple ci-dessous, la suite décroissante est minorée par 2. Cela prouve que la limite de la suite est supérieure ou égale à 2, mais elle n'est pas nécessairement égale à 2.



Méthode 4.6: Utiliser le théorème de convergence monotone

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.
Démontrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Correction

— On a démontré dans le chapitre « Raisonnement par récurrence » que la suite (u_n) est croissante.
On a démontré dans la méthode précédente que la suite (u_n) est majorée par 3.
D'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

— On pose : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.
Or $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}u_n + 2\right) = \frac{1}{3}L + 2$, par produit et somme de limites.
Une limite étant unique, on en déduit que $L = \frac{1}{3}L + 2$, soit $L = 3$.
La suite (u_n) converge donc vers 3.

Corollaire 4.7

1. Si une suite croissante est non majorée, alors elle tend vers $+\infty$.
2. Si une suite décroissante est non minorée, alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration du 1. (au programme). Soit un réel a.

Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un entier p tel que $u_p > a$.

La suite (u_n) est croissante, donc pour tout $n > p$, on a : $u_n \geqslant u_p$.

Donc pour tout $n > p$, on a : $u_n > a$.

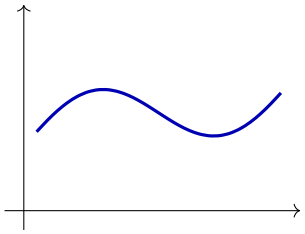
Et donc, à partir d'un certain rang p, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]a\,;+\infty[$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. □

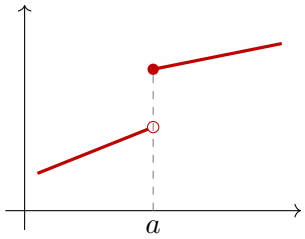
4.3 Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$: théorème du point fixe

Définition 4.8: Fonction continue (définition simplifiée)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est **continue sur** I si sa courbe représentative sur I peut se tracer **sans lever le crayon**.



f est continue sur l'intervalle : un seul trait



f n'est pas continue en a : la courbe « saute »

Propriété 4.9: Fonctions continues usuelles (admis)

- Les fonctions polynômes, la fonction exponentielle, les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est continue sur $[0\,;+\infty[$; la fonction inverse est continue sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.
- Une somme, un produit, un quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou une composée de fonctions continues est une fonction continue.
- Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Remarque

Cette définition est intuitive : la définition précise de la continuité, à l'aide des limites, sera vue dans le chapitre consacré à la continuité. En pratique, toutes les fonctions rencontrées dans ce chapitre sont continues sur les intervalles où elles sont définies.

Théorème 4.10: Théorème du point fixe (admis)

Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle I, et (u_n) une suite définie par $u_0 \in I$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $u_n \in I$ pour tout n.
Si la suite (u_n) **converge** vers un réel ℓ appartenant à I, alors ℓ est solution de l'équation

$$f(x) = x,$$

c'est-à-dire $f(\ell) = \ell$: on dit que ℓ est un **point fixe** de f.

Remarque : Précautions d'emploi

- Il faut **d'abord démontrer que la suite converge** (par exemple avec le théorème de convergence monotone). L'équation $f(x) = x$ peut avoir des solutions alors que la suite diverge : avec $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n$, l'équation $2x = x$ a pour solution 0, mais $u_n = 2^n$ tend vers $+\infty$.
- Si l'équation $f(x) = x$ a plusieurs solutions, on utilise les encadrements connus de la suite (minorant, majorant) pour savoir laquelle est la limite : si $m \leqslant u_n \leqslant M$ pour tout n, alors $m \leqslant \ell \leqslant M$ (passage à la limite dans des inégalités larges).
- Lorsque f est une fonction affine ou polynôme, on peut aussi retrouver $\ell = f(\ell)$ directement par opérations sur les limites, comme dans la méthode « Utiliser le théorème

de convergence monotone ».

Méthode 4.11: Déterminer la limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.
On admet que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
2. Déterminer sa limite.

Correction

1. Pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$: la suite (u_n) est croissante. Pour tout n, $u_n \leqslant 3$: elle est majorée par 3.
   D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
2. • **Où se trouve ℓ ?** Pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$, donc par passage à la limite, $0 \leqslant \ell \leqslant 3$.
   • **Point fixe.** Pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{2x+3}$. La fonction f est continue sur $I = [0\,;+\infty[$ (composée de la fonction affine $x \mapsto 2x+3$, positive sur I, et de la fonction racine carrée), et tous les termes u_n ainsi que ℓ appartiennent à I.
   D'après le théorème du point fixe, $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire $\sqrt{2\ell+3} = \ell$.
   • **Résolution.** Comme $\ell \geqslant 0$, on peut élever au carré sans perdre d'information :

$$\sqrt{2\ell+3} = \ell \iff 2\ell + 3 = \ell^2 \text{ et } \ell \geqslant 0 \iff \ell^2 - 2\ell - 3 = 0 \text{ et } \ell \geqslant 0.$$

   Le discriminant de $x^2 - 2x - 3$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$, d'où les deux racines

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3.$$

   Comme $\ell \geqslant 0$, on a $\ell = 3$.
   Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Remarque : ici, les opérations sur les limites ne suffisent pas (à cause de la racine carrée) : le théorème du point fixe est indispensable.

5 Comportement à l'infini d'une suite géométrique

5.1 Rappel

Définition 5.1: Suite géométrique

Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que, pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé la **raison** de la suite.

Exemple 5.2

La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = -3u_n$ et $u_0 = 5$ est une suite géométrique de raison -3 et de premier terme 5.

Propriété 5.3: Forme explicite

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

Exemple 5.4

Pour la suite précédente, on a, pour tout n : $u_n = 5 \times (-3)^n$.

5.2 Limites

Propriété 5.5: Limite de (q^n)

q	$q \leqslant -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$	Pas de limite	0	1	$+\infty$

Démonstration au programme dans le cas $q > 1$. Prérequis : pour tout entier naturel n et tout réel $a \geqslant 0$, on a : $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ (**inégalité de Bernoulli**), démontrée dans le chapitre « Raisonnement par récurrence ».

On suppose que $q > 1$; on peut alors poser $q = a + 1$ avec $a > 0$.

$q^n = (1+a)^n \geqslant 1 + na$, d'après l'inégalité de Bernoulli.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + na) = +\infty$ car $a > 0$.

Donc, d'après le théorème de comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$. □

Exemple 5.6

La suite de terme général -5×4^n a pour limite $-\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$.

Méthode 5.7: Étudier un phénomène modélisable par une suite

Un investisseur dépose 5000 € sur un compte rémunéré à 3 % par an. Chaque année suivante, il dépose 300 € de plus sur ce compte.
On note (u_n) la somme épargnée à l'année n. On a alors : $u_{n+1} = 1{,}03\,u_n + 300$ et $u_0 = 5000$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Prouver que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n + 10\,000$ est géométrique, et donner sa raison et son premier terme.
3. Exprimer v_n en fonction de n.
4. En déduire u_n en fonction de n. Puis calculer u_{10}.
5. Étudier les variations de (u_n).

Correction

1. $u_1 = 1{,}03\,u_0 + 300 = 5450$ et $u_2 = 1{,}03\,u_1 + 300 = 5913{,}5$.
2. $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 10\,000 \\ &= 1{,}03\,u_n + 300 + 10\,000 \\ &= 1{,}03\,u_n + 10\,300 \\ &= 1{,}03\,(v_n - 10\,000) + 10\,300 \qquad \text{car } u_n = v_n - 10\,000 \\ &= 1{,}03\,v_n - 10\,300 + 10\,300 \\ &= 1{,}03\,v_n. \end{aligned}$$

   Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme $v_0 = u_0 + 10\,000 =$

$5000 + 10\,000 = 15\,000$.

3. Pour tout n, $v_n = 15\,000 \times 1{,}03^n$.
4. Pour tout n, $u_n = v_n - 10\,000 = 15\,000 \times 1{,}03^n - 10\,000$.
   On a alors : $u_{10} = 15\,000 \times 1{,}03^{10} - 10\,000 \approx 10\,158{,}75$.
5. Pour tout n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 15\,000 \times 1{,}03^{n+1} - 10\,000 - (15\,000 \times 1{,}03^n - 10\,000) \\ &= 15\,000 \times \left(1{,}03^{n+1} - 1{,}03^n\right) \\ &= 15\,000 \times 1{,}03^n \times (1{,}03 - 1) \\ &= 450 \times 1{,}03^n > 0. \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

5.3 Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété 5.8: Somme des termes d'une suite géométrique

n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 ; on a alors :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Méthode 5.9: Utiliser la limite d'une suite géométrique

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-2)^n}{3}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} (2^n - 3^n)$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$

Correction

a) $((-2)^n)$ est une suite géométrique de raison -2, strictement inférieure à -1.
Donc $((-2)^n)$ ne possède pas de limite, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-2)^n}{3}$ n'existe pas.

b) • $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$.
Il s'agit d'une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».
• Levons l'indétermination :

$$2^n - 3^n = 3^n \left(\frac{2^n}{3^n} - 1\right) = 3^n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right).$$

• Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$, car $\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ avec $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$.
Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 1\right) = -1$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ car (3^n) est une suite géométrique de raison 3, strictement supérieure à 1.
Donc, par limite d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n \left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 1\right) = -\infty$.

Soit : $\lim\limits_{n\to+\infty}(2^n-3^n)=-\infty$.

c) On reconnaît la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme 1. Donc :

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=0$, comme limite d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ avec $-1<\dfrac{1}{2}<1$.

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=1$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=2$.

Soit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)=2$.