Limites de suites

Feuilles d'exercices et corrections

Mathématiques – Terminale – Enseignement de spécialité

Ce document regroupe l'ensemble des exercices du chapitre : opérations sur les limites, théorèmes de comparaison, puis exercices de type bac.

Feuille 1 – Opérations sur les limites

---

1 Limite d'une somme

Exercice 1: Limite d'une somme

Déterminer la limite des suites définies ci-dessous pour tout $n \geqslant 1$:

a) $u_n = n^2 + 2n + 5$ c) $u_n = n^2 - 4n$ e) $u_n = n^3 - 5n^2 - 10n$

b) $u_n = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n} + 3$ d) $u_n = -n^2 + \dfrac{1}{n^2} + 1000$ f) $u_n = \sqrt{n} - n$

Correction de l'exercice 1

Rappel de méthode. On cherche d'abord la limite de chaque terme, puis on applique le tableau « limite d'une somme ». Si l'on tombe sur la forme indéterminée $+\infty - \infty$, on **factorise par le terme prépondérant** (la plus grande puissance de n).

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 = 5$.

Par somme : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 - 0 + 3$, soit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-4n) = -\infty$: on obtient la forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ».

On factorise par n^2 : pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = n^2 \left(1 - \frac{4}{n}\right).$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{4}{n}\right) = 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

Par produit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

Remarque : on peut aussi écrire $u_n = n(n-4)$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-4) = +\infty$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n^2) = -\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1000 = 1000$.

Par somme : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-5n^2) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-10n) = -\infty$: forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ».

On factorise par n^3 : pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = n^3 \left(1 - \frac{5}{n} - \frac{10}{n^2}\right).$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{10}{n^2} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{5}{n} - \frac{10}{n^2}\right) = 1$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$.

Par produit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n) = -\infty$: forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ».

Pour tout $n \geqslant 1$, $n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}$, donc on peut factoriser par $\sqrt{n}$:

$$u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n} \times \sqrt{n} = \sqrt{n}\,(1 - \sqrt{n}).$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - \sqrt{n}) = -\infty$.

Par produit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

Variante : $u_n = n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right) = -1$.

2 Limite d'un produit

Exercice 2: Limite d'un produit

Déterminer la limite des suites définies ci-dessous pour tout $n \geqslant 1$:

a) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(-3 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

b) $u_n = n^2\left(\frac{1}{n} - 6\right)$

c) $u_n = \frac{1}{n}\left(n^2 - 2n + 3\right)$

d) $u_n = \left(-1 + \frac{1}{n^5}\right)(-3n + 1)$

e) $u_n = -4n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

f) $u_n = \frac{5}{n}\left(\frac{3}{n^2} - \frac{2}{n}\right)$

Correction de l'exercice 2

Rappel de méthode. On cherche la limite de chaque facteur, puis on applique la règle des signes du tableau « limite d'un produit ». Si l'on tombe sur la forme indéterminée « $0 \times \infty$ », on **développe** puis on simplifie.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-3 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -3$.

Par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 \times (-3)$, soit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} - 6\right) = -6 < 0$.

Par produit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Pour le second facteur, n^2-2n+3 est lui-même une forme indéterminée « $+\infty-\infty$ » : $n^2-2n+3 = n^2\left(1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)$ tend vers $+\infty$.
On obtient donc la forme indéterminée « $0\times\infty$ ». On développe : pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{n^2}{n} - \frac{2n}{n} + \frac{3}{n} = n - 2 + \frac{3}{n}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2) = -2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0$.
Par somme : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^5} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-1+\dfrac{1}{n^5}\right) = -1 < 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (-3n+1) = -\infty$.
Par produit (signe : $-\times-=+$) : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} (-4n) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) = 0$: forme indéterminée « $0\times\infty$ ».
On développe : pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = -\frac{4n}{n} - \frac{4n}{n^2} = -4 - \frac{4}{n}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} = 0$, donc par somme : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -4}$.

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{2}{n}\right) = 0-0 = 0$.
Il ne s'agit **pas** d'une forme indéterminée : c'est un produit de deux suites convergentes, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0\times 0$, soit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

3 Limite d'un quotient

Exercice 3: Limite d'un quotient

Déterminer la limite des suites définies ci-dessous pour tout $n \geqslant 1$:

a) $u_n = \dfrac{3}{n+1}$

b) $u_n = \dfrac{n^2+3}{\frac{1}{n}-2}$

c) $u_n = \dfrac{2-\frac{1}{n+3}}{5+\frac{1}{n^2}}$

d) $u_n = \dfrac{n^2}{5n+2}$

e) $u_n = \dfrac{3n+6}{5-2n}$

f) $u_n = \dfrac{\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n}}{-\frac{3}{n}}$

Correction de l'exercice 3

Rappel de méthode. On cherche la limite du numérateur et celle du dénominateur, puis on applique le tableau « limite d'un quotient ». En cas de forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » ou « $\dfrac{0}{0}$ », on **factorise numérateur et dénominateur par leur terme prépondérant** (ou on multiplie haut et bas par une même quantité) puis on simplifie.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$.

Par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+3) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-2\right) = -2 < 0$.

Par quotient (un infini divisé par un réel non nul négatif) : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+3} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{n+3}\right) = 2$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5+\dfrac{1}{n^2}\right) = 5 \neq 0$.

Par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{5}}$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(5n+2) = +\infty$: forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».
On factorise le dénominateur par n et on simplifie : pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{n^2}{n\left(5+\frac{2}{n}\right)} = \frac{n}{5+\frac{2}{n}}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5+\dfrac{2}{n}\right) = 5 > 0$.

Par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n+6) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(5-2n) = -\infty$: forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».
On factorise numérateur et dénominateur par n : pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{n\left(3+\frac{6}{n}\right)}{n\left(\frac{5}{n}-2\right)} = \frac{3+\frac{6}{n}}{\frac{5}{n}-2}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\dfrac{6}{n}\right) = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5}{n}-2\right) = -2 \neq 0$.

Par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{3}{2}}$.

f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{3}{n}\right) = 0$: forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ ».
On multiplie numérateur et dénominateur par n (non nul) : pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{n\left(\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n}\right)}{n\times\left(-\frac{3}{n}\right)} = \frac{\frac{2}{n}+1}{-3}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{n}+1\right) = 1$, donc par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{1}{3}}$.

Feuille 2 – Comparaison de suites

4 Comparaison de suites

Exercice 4: Comparaison de suites

Déterminer la limite éventuelle des suites suivantes, toutes définies sur $\mathbb{N}$ (sauf précision complémentaire) :

$u_n = 5n^2 + \sin(n)$

$v_n = -n^3 - \cos(n)$

$a_n = 2n^5 - (-1)^n$

$b_n = 2n + 3(-1)^n$

$e_n = 4 + \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$c_n = n^2 + (n+1)^7$

$d_n = -n^4 - e^{2n^2+1}$

$f_n = \dfrac{2 + 3\cos(n)}{n^3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$g_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{4n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$h_n = \dfrac{-4n + \cos(2n)}{3n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Correction de l'exercice 4

Outils utilisés.

- Pour tout réel x : $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$; pour tout entier n : $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.
- **Théorème de comparaison** : si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (et l'analogue en $-\infty$).
- **Théorème des gendarmes** : si $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$ à partir d'un certain rang et si (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite ℓ, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Les suites $\sin(n)$, $\cos(n)$ et $(-1)^n$ **n'ont pas de limite** : on ne peut donc pas utiliser directement les opérations sur les limites, il faut encadrer.

- **Suite (u_n).** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(n) \geqslant -1$, donc

$$u_n = 5n^2 + \sin(n) \geqslant 5n^2 - 1.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (5n^2 - 1) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

- **Suite (v_n).** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(n) \geqslant -1$, donc $-\cos(n) \leqslant 1$ et

$$v_n = -n^3 - \cos(n) \leqslant -n^3 + 1.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n^3 + 1) = -\infty$. D'après le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty}$.

- **Suite (a_n).** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \leqslant 1$, donc $-(-1)^n \geqslant -1$ et

$$a_n = 2n^5 - (-1)^n \geqslant 2n^5 - 1.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n^5 - 1) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty}$.

- **Suite (b_n).** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \geqslant -1$, donc $3(-1)^n \geqslant -3$ et

$$b_n = 2n + 3(-1)^n \geqslant 2n - 3.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n - 3) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty}$.

- **Suite (e_n).** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$. En divisant par $\sqrt{n} > 0$ (le sens des inégalités ne change pas) :
$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \text{donc} \qquad 4 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant e_n \leqslant 4 + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(4 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(4 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 4$.
D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 4}$.
- **Suite (c_n).** Ici, **pas besoin de comparaison** : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)^7 = +\infty$.
Par somme : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty}$.
- **Suite (d_n).** Une exponentielle est toujours strictement positive : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{2n^2+1} > 0$, donc
$$d_n = -n^4 - e^{2n^2+1} \leqslant -n^4.$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n^4) = -\infty$. D'après le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = -\infty}$.
Remarque : on évite ainsi d'utiliser la limite de l'exponentielle en $+\infty$.
- **Suite (f_n).** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$, donc $-3 \leqslant 3\cos(n) \leqslant 3$, puis $-1 \leqslant 2 + 3\cos(n) \leqslant 5$. En divisant par $n^3 > 0$:
$$-\frac{1}{n^3} \leqslant f_n \leqslant \frac{5}{n^3}.$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{n^3}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n^3} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = 0}$.
- **Suite (g_n).** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$g_n = \frac{2n}{4n} + \frac{(-1)^n}{4n} = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{4n}.$$
Comme $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ et $4n > 0$:
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \leqslant g_n \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}.$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4n} = 0$, donc les deux suites encadrantes tendent vers $\frac{1}{2}$. D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = \frac{1}{2}}$.
- **Suite (h_n).** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$h_n = \frac{-4n}{3n} + \frac{\cos(2n)}{3n} = -\frac{4}{3} + \frac{\cos(2n)}{3n}.$$
Comme $-1 \leqslant \cos(2n) \leqslant 1$ et $3n > 0$:
$$-\frac{4}{3} - \frac{1}{3n} \leqslant h_n \leqslant -\frac{4}{3} + \frac{1}{3n}.$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3n} = 0$, donc les deux suites encadrantes tendent vers $-\frac{4}{3}$. D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = -\frac{4}{3}}$.

Feuille 3 – Exercices de type bac

5 Bac France métropolitaine 2022 (sujet 1)

Exercice 5: Annale de bac – France métropolitaine 2022, sujet 1

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1 de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}8$.
3. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
   c) Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.
   b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.
   c) Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.
   Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

Correction de l'exercice 5

1. Une heure après l'injection initiale, la quantité de 2 mg a diminué de 30 % : il en reste $2 \times (1 - 0{,}30) = 2 \times 0{,}7 = 1{,}4$ mg. On réinjecte alors 1,8 mg, donc
$$u_1 = 1{,}4 + 1{,}8 = \boxed{3{,}2 \text{ mg}}.$$
2. Soit n un entier naturel. Immédiatement après l'injection de la n-ième heure, il y a u_n mg de médicament dans le sang.
   — Une heure plus tard, cette quantité a diminué de 30 % : il en reste $(1 - 0{,}3)\,u_n = 0{,}7\,u_n$ (coefficient multiplicateur associé à une baisse de 30 %).
   — On injecte alors 1,8 mg.
   Donc, pour tout entier naturel n, $\boxed{u_{n+1} = 0{,}7\,u_n + 1{,}8}$.
3. a) Pour tout entier naturel n, notons P_n la propriété : « $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$ ».

Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = 3{,}2$, donc $u_0 \leqslant u_1 < 6$: P_0 est vraie.
Hérédité : soit k un entier naturel tel que P_k est vraie, c'est-à-dire $u_k \leqslant u_{k+1} < 6$.
Montrons que P_{k+1} est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} \leqslant u_{k+2} < 6$.

$$\begin{aligned} u_k \leqslant u_{k+1} < 6 &\implies 0{,}7\,u_k \leqslant 0{,}7\,u_{k+1} < 0{,}7 \times 6 && \text{car } 0{,}7 > 0 \\ &\implies 0{,}7\,u_k + 1{,}8 \leqslant 0{,}7\,u_{k+1} + 1{,}8 < 4{,}2 + 1{,}8 \\ &\implies u_{k+1} \leqslant u_{k+2} < 6. \end{aligned}$$

Donc P_{k+1} est vraie.
Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n \leqslant u_{n+1} < 6}$.

b) D'après la question précédente :
— pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$: la suite (u_n) est **croissante** ;
— pour tout n, $u_{n+1} < 6$, et $u_0 = 2 < 6$: la suite (u_n) est **majorée** par 6.
Toute suite croissante et majorée converge (théorème de convergence monotone) : la suite (u_n) est donc **convergente**.

c) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, donc on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ (c'est la même suite, décalée d'un rang).
Par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}7\,u_n + 1{,}8) = 0{,}7\,\ell + 1{,}8$.
Par unicité de la limite, en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = 0{,}7\,u_n + 1{,}8$:

$$\ell = 0{,}7\,\ell + 1{,}8 \iff 0{,}3\,\ell = 1{,}8 \iff \ell = \frac{1{,}8}{0{,}3} \iff \boxed{\ell = 6}.$$

Interprétation : sur le long terme, la quantité de médicament présente dans le sang du patient juste après une injection se rapproche de 6 mg, sans jamais l'atteindre (d'après 3a, $u_n < 6$).

4. a) Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 6 - u_{n+1} \\ &= 6 - (0{,}7\,u_n + 1{,}8) \\ &= 4{,}2 - 0{,}7\,u_n \\ &= 0{,}7 \times (6 - u_n) && \text{car } 0{,}7 \times 6 = 4{,}2 \\ &= 0{,}7\,v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 0{,}7$, de premier terme $v_0 = 6 - u_0 = 6 - 2 = \boxed{4}$.

b) D'après le cours sur les suites géométriques, pour tout entier naturel n,

$$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{4 \times 0{,}7^n}.$$

Comme $v_n = 6 - u_n$, on a $u_n = 6 - v_n$, donc

$$\boxed{u_n = 6 - 4 \times 0{,}7^n}.$$

Vérification : $u_0 = 6 - 4 = 2$ et $u_1 = 6 - 2{,}8 = 3{,}2$. ✓
Remarque : on retrouve $\ell = 6$: comme $-1 < 0{,}7 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}7^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$.

c) On cherche le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 5{,}5$:

$$\begin{aligned} u_n \geqslant 5{,}5 &\iff 6 - 4 \times 0{,}7^n \geqslant 5{,}5 \\ &\iff -4 \times 0{,}7^n \geqslant -0{,}5 \\ &\iff 0{,}7^n \leqslant 0{,}125 \qquad \text{(division par } -4 < 0 \text{ : le sens change).} \end{aligned}$$

La suite $(0{,}7^n)$ est strictement décroissante (car $0 < 0{,}7 < 1$). À la calculatrice :

$$0{,}7^5 = 0{,}16807 > 0{,}125 \qquad \text{et} \qquad 0{,}7^6 = 0{,}117649 \leqslant 0{,}125.$$

Le plus petit entier qui convient est donc $n = 6$: $u_5 \approx 5{,}33 < 5{,}5$ et $u_6 \approx 5{,}53 \geqslant 5{,}5$.

u_6 est la quantité présente immédiatement après l'injection de la 6e heure. Les injections ont donc eu lieu aux heures $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$: il y a eu **7 injections** (l'injection initiale, puis 6 réinjections).

Remarque : lorsque le logarithme népérien aura été vu, on pourra résoudre $0{,}7^n \leqslant 0{,}125 \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}125)}{\ln(0{,}7)} \approx 5{,}83$ (le sens change car $\ln(0{,}7) < 0$).

Remarque : Passage à la limite dans la relation de récurrence

En 3c, on n'a pas eu besoin du théorème du point fixe : la fonction $x \mapsto 0{,}7x + 1{,}8$ étant affine, les **opérations sur les limites** suffisent. Mais il faut d'abord savoir que la suite converge (question 3b) : on ne passe jamais à la limite dans une relation de récurrence sans avoir établi la convergence.

6 Type bac Pondichéry 2017

Exercice 6: Exercice type bac – Pondichéry 2017

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$.
(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 2^n$.

1) Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur. Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	n	u(n)	v(n)
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16
7	5	99	32
8	6	196	64
9	7	389	128
10	8	774	256
11	9	1543	512
12	10	3080	1024
13	11	6153	2048
14	12	12296	4096
15	13	24587	8192

a) Quelles formules saisies dans les cellules B3 et C3, puis recopiées vers le bas, permettent d'obtenir les valeurs des suites (u_n) et (v_n) ?

b) Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

2) Étude de la suite (u_n)

a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

b) Déterminer la limite de la suite (u_n).

3) Étude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

a) Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir de l'indice 3.

b) On admet que, pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, on a : $0 < \dfrac{n}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Correction de l'exercice 6

1) Conjectures

a) On traduit les relations de définition, en utilisant la ligne précédente :

— en B3 : `=2*B2-A2+3` (car $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$, et la valeur de n est dans la colonne A) ;

— en C3 : `=2*C2` (car $v_{n+1} = 2v_n$) ou bien `=2^A3` (car $v_n = 2^n$).

b) Les termes de (u_n) deviennent de plus en plus grands : on conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

En calculant quelques quotients : $\dfrac{u_{10}}{v_{10}} = \dfrac{3080}{1024} \approx 3{,}008$ et $\dfrac{u_{13}}{v_{13}} = \dfrac{24\,587}{8192} \approx 3{,}0001$. On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 3$.

2) Étude de la suite (u_n)

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la propriété : « $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$ ».

Initialisation : $3 \times 2^0 + 0 - 2 = 3 - 2 = 1 = u_0$: P_0 est vraie.
Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k est vraie, c'est-à-dire $u_k = 3 \times 2^k + k - 2$. Alors

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k - k + 3 \\ &= 2\left(3 \times 2^k + k - 2\right) - k + 3 \qquad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= 3 \times 2^{k+1} + 2k - 4 - k + 3 \\ &= 3 \times 2^{k+1} + k - 1 \\ &= 3 \times 2^{k+1} + (k+1) - 2. \end{aligned}$$

Donc P_{k+1} est vraie.
Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = 3 \times 2^n + n - 2}$.

b) $2 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 \times 2^n = +\infty$ (produit par $3 > 0$). De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-2) = +\infty$.
Par somme : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

3) Étude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$. D'après 2a :

$$w_n = \frac{3 \times 2^n + n - 2}{2^n} = 3 + \frac{n-2}{2^n}.$$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= 3 + \frac{(n+1)-2}{2^{n+1}} - 3 - \frac{n-2}{2^n} \\ &= \frac{n-1}{2^{n+1}} - \frac{2(n-2)}{2^{n+1}} \\ &= \frac{n-1-2n+4}{2^{n+1}} \\ &= \frac{3-n}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Comme $2^{n+1} > 0$, $w_{n+1} - w_n$ est du signe de $3 - n$. Pour $n \geqslant 3$, $3 - n \leqslant 0$, donc $w_{n+1} - w_n \leqslant 0$.
La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est donc **décroissante à partir de l'indice** 3.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 3 + \dfrac{n}{2^n} - \dfrac{2}{2^n}$.

— **Limite de $\boldsymbol{\frac{n}{2^n}}$:** on obtient une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ », d'où l'encadrement admis : pour tout $n \geqslant 4$, $0 < \dfrac{n}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$: d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

— **Limite de $\boldsymbol{\frac{2}{2^n}}$:** $\dfrac{2}{2^n} = 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{2^n} = 0$.

Par somme : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 3}$, ce qui confirme la conjecture de la question 1b.

Remarque : À propos de l'inégalité admise

$\dfrac{n}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n} \iff n^2 \leqslant 2^n$, ce qui est vrai pour $n \geqslant 4$ et se démontre par récurrence : c'est un bon exercice d'approfondissement.

7 Bac Asie 2022

Exercice 7: Annale de bac – Asie 2022 (5 points)

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Soit n un entier naturel.
   Recopier et compléter la fonction `suite_u` d'argument `n` ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de u_n.

```
1  def suite_u(n) :
2      u = ...
3      for i in range(1,n+1) :
4          u = ...
5      return u
```

3. a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2n$.
   b) En déduire la limite de la suite (u_n).
   c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel n vérifiant $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?
4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
5. On considère la suite (v_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 2n + 1$.
   a) En dessous de la fonction `suite_u` précédente, on a écrit la fonction `suite_v` ci-dessous :

```
1  def suite_v(n):
2      L = []
3      for i in range(n+1) :
4          L.append(suite_u(i) - 2*i + 1)
5      return L
```

   La commande « L.append » permet de rajouter, en dernière position, un élément dans la liste L.
   Lorsqu'on saisit `suite_v(5)` dans la console, on obtient l'affichage suivant :

```
>>> suite_v(5)
[1, 5, 25, 125, 625, 3125]
```

   Conjecturer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n. Démontrer cette conjecture.
   b) En déduire, pour tout entier naturel n, la forme explicite de u_n en fonction de n.

Correction de l'exercice 7

1. Avec $n = 0$: $u_1 = 5u_0 - 8 \times 0 + 6 = 5 \times 0 - 0 + 6 = \boxed{6}$.
   Avec $n = 1$: $u_2 = 5u_1 - 8 \times 1 + 6 = 30 - 8 + 6 = \boxed{28}$.
2. La variable `u` doit contenir $u_0 = 0$ au départ. À chaque passage dans la boucle, `u` contient u_{i-1} et doit être remplacée par $u_i = 5u_{i-1} - 8(i-1) + 6$ (on applique la relation de récurrence avec $n = i - 1$) :

```
1  def suite_u(n) :
2      u = 0
3      for i in range(1,n+1) :
```

```
4            u = 5*u - 8*(i-1) + 6
5        return u
```

Attention au piège : écrire `u = 5*u - 8*i + 6` serait faux, car au tour numéro i on calcule u_i à partir de u_{i-1}, donc avec $n = i - 1$. On peut vérifier : `suite_u(2)` renvoie bien 28.

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la propriété : « $u_n \geqslant 2n$ ».
Initialisation : $u_0 = 0$ et $2 \times 0 = 0$, donc $u_0 \geqslant 2 \times 0$: P_0 est vraie.
Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \geqslant 2k$. Alors

$$\begin{aligned} u_k \geqslant 2k &\implies 5u_k \geqslant 10k \\ &\implies 5u_k - 8k + 6 \geqslant 10k - 8k + 6 \\ &\implies u_{k+1} \geqslant 2k + 6. \end{aligned}$$

Or $2k + 6 \geqslant 2k + 2 = 2(k + 1)$, donc $u_{k+1} \geqslant 2(k + 1)$: P_{k+1} est vraie.
Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n \geqslant 2n}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2n$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

c) Par définition d'une suite qui tend vers $+\infty$: pour tout réel A, l'intervalle $[A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
En appliquant cette définition avec $A = 10^p$: il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$.
Remarque : on peut même donner un tel n_0 explicitement : d'après 3a, $u_n \geqslant 2n \geqslant 10^p$ dès que $n \geqslant \dfrac{10^p}{2}$, donc $n_0 = 5 \times 10^{p-1}$ convient (c'est un entier car $p \geqslant 1$).

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = 5u_n - 8n + 6 - u_n = 4u_n - 8n + 6.$$

D'après 3a, $u_n \geqslant 2n$, donc $4u_n \geqslant 8n$, et

$$u_{n+1} - u_n = 4u_n - 8n + 6 \geqslant 8n - 8n + 6 = 6 > 0.$$

La suite (u_n) est donc **(strictement) croissante**.

5. a) La liste affichée contient $v_0, v_1, \ldots, v_5$: 1, 5, 25, 125, 625, 3125. Chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par 5 : on conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 5\,v_n$.
Démonstration : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2(n + 1) + 1 \\ &= 5u_n - 8n + 6 - 2n - 2 + 1 \\ &= 5u_n - 10n + 5 \\ &= 5\,(u_n - 2n + 1) \\ &= 5\,v_n. \end{aligned}$$

La conjecture est démontrée : (v_n) est géométrique de raison 5.

b) (v_n) est géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 + 1 = 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 \times 5^n = 5^n$.
Comme $v_n = u_n - 2n + 1$, on a $u_n = v_n + 2n - 1$, donc

$$\boxed{u_n = 5^n + 2n - 1}.$$

Vérification : $u_0 = 1 + 0 - 1 = 0$, $u_1 = 5 + 2 - 1 = 6$, $u_2 = 25 + 4 - 1 = 28$. ✓

8 Bac Amérique du Nord 2021

Exercice 8: Annale de bac – Amérique du Nord, mai 2021 (5 points)

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique. Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.
Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0{,}6 \\ u_{n+1} = 0{,}75\,u_n\,(1 - 0{,}15\,u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020 + n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par

$$f(x) = 0{,}75\,x(1 - 0{,}15\,x).$$

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$ et dresser son tableau de variations.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   c) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.
   a) Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.
   b) Le biologiste a programmé en langage Python la fonction `menace()` ci-dessous :

```
1  def menace():
2      u = 0.6
3      n = 0
4      while u > 0.02:
5          u = 0.75*u*(1-0.15*u)
6          n = n+1
7      return n
```

   Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction `menace()`.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Correction de l'exercice 8

1. Le nombre d'individus au début de l'année 2021 correspond à u_1 :

$$u_1 = 0{,}75\,u_0\,(1 - 0{,}15\,u_0) = 0{,}75 \times 0{,}6 \times (1 - 0{,}15 \times 0{,}6) = 0{,}45 \times 0{,}91 = 0{,}4095.$$

u_n étant exprimé en milliers, cela correspond à 409,5, soit **environ 410 individus**.
Le nombre d'individus au début de l'année 2022 correspond à u_2 :

$$u_2 = 0{,}75\,u_1\,(1 - 0{,}15\,u_1) = 0{,}75 \times 0{,}4095 \times (1 - 0{,}15 \times 0{,}4095) \approx 0{,}2883,$$

soit **environ 288 individus**.

2. **Méthode 1 : avec la forme développée (second degré).**
Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}75\,x(1-0{,}15\,x) \\ &= 0{,}75\,x - 0{,}75\times 0{,}15\,x^2 \\ &= -0{,}1125\,x^2 + 0{,}75\,x. \end{aligned}$$

f est un polynôme du second degré avec $a=-0{,}1125<0$ et $b=0{,}75$: la parabole est tournée vers le bas et son sommet est atteint pour

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-0{,}75}{2\times(-0{,}1125)}=\frac{0{,}75}{0{,}225}=\frac{10}{3}.$$

Donc f est croissante sur $\left]-\infty\,;\,\frac{10}{3}\right]$, et en particulier sur $[0\,;1]$ car $[0\,;1]\subset\left]-\infty\,;\,\frac{10}{3}\right]$.

Méthode 2 : avec la dérivée.
f est dérivable sur $[0\,;1]$ (fonction polynôme) et, pour tout $x\in[0\,;1]$,

$$f'(x)=-0{,}1125\times 2x+0{,}75=-0{,}225\,x+0{,}75.$$

Pour $0\leqslant x\leqslant 1$: $-0{,}225\leqslant -0{,}225\,x\leqslant 0$, donc $f'(x)\geqslant 0{,}75-0{,}225=0{,}525>0$.
f' est strictement positive sur $[0\,;1]$, donc f est strictement croissante sur $[0\,;1]$.

Tableau de variations sur $[0\,;1]$**.** $f(0)=0$ et $f(1)=0{,}75\times 1\times(1-0{,}15)=0{,}75\times 0{,}85=0{,}6375$.

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	0,6375

3. Pour $x\in[0\,;1]$:

$$\begin{aligned} f(x)=x &\iff -0{,}1125\,x^2+0{,}75\,x=x \\ &\iff -0{,}1125\,x^2-0{,}25\,x=0 \\ &\iff x\,(-0{,}1125\,x-0{,}25)=0 \\ &\iff x=0 \quad\text{ou}\quad -0{,}1125\,x-0{,}25=0 \qquad \text{(produit nul)} \\ &\iff x=0 \quad\text{ou}\quad x=\frac{-0{,}25}{0{,}1125}=-\frac{20}{9}. \end{aligned}$$

Or $-\frac{20}{9}\notin[0\,;1]$. L'équation $f(x)=x$ admet donc **une unique solution dans** $[0\,;1]$ **:** $\boldsymbol{x=0}$.

4. a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons P_n la propriété : « $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 1$ ».
Initialisation : $u_0=0{,}6$ et $u_1=0{,}4095$, donc $0\leqslant u_1\leqslant u_0\leqslant 1$: P_0 est vraie.
Hérédité : soit $k\in\mathbb{N}$ tel que P_k est vraie : $0\leqslant u_{k+1}\leqslant u_k\leqslant 1$.

Les nombres 0, u_{k+1}, u_k et 1 appartiennent tous à $[0\,;1]$, intervalle sur lequel f est croissante (question 2). Une fonction croissante conserve l'ordre, donc

$$f(0) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f(1), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 0{,}6375.$$

Comme $0{,}6375 \leqslant 1$, on obtient $0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$: P_{k+1} est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1}$.

b) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

— $u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) est **décroissante** ;

— $u_n \geqslant 0$: la suite (u_n) est **minorée** par 0.

Toute suite décroissante et minorée converge (théorème de convergence monotone) : la suite (u_n) est donc **convergente**.

c) Notons ℓ la limite de (u_n).

Où se trouve ℓ ? Pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Par passage à la limite dans les inégalités (les inégalités larges sont conservées), $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

Équation vérifiée par ℓ. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. Par ailleurs, pour tout n, $u_{n+1} = 0{,}75\,u_n - 0{,}1125\,u_n^2$, donc par opérations sur les limites

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0{,}75\,\ell - 0{,}1125\,\ell^2 = f(\ell).$$

Par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$.

Conclusion. ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$ appartenant à $[0\,;1]$. D'après la question 3, la seule possibilité est $\ell = 0$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}.$$

Remarque : Théorème du point fixe

Le résultat utilisé ici est le théorème du point fixe vu en cours : *si (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue, et si (u_n) converge vers ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.* Ici f est un polynôme, donc continue, et on peut l'appliquer directement.

Ici, comme f est une fonction polynôme, on peut s'en passer : les **opérations sur les limites** suffisent, comme ci-dessus. Deux points sont indispensables dans la rédaction :

— on n'applique ce raisonnement qu'**après avoir démontré la convergence** (question 4b) ;

— il faut justifier que $\ell \in [0\,;1]$ pour éliminer la solution $-\dfrac{20}{9}$.

5. a) La population est menacée lorsqu'elle devient inférieure ou égale à 20 individus, c'est-à-dire lorsque $u_n \leqslant 0{,}02$ (en milliers).

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$: par définition de la convergence, l'intervalle ouvert $]-0{,}02\,;0{,}02[$, qui contient 0, contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. Il existe donc un rang à partir duquel $u_n < 0{,}02$: selon ce modèle, l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction, et **le biologiste a raison**.

b) La fonction calcule les termes successifs de la suite tant que $u > 0{,}02$. Elle renvoie donc le **premier rang n tel que** $u_n \leqslant 0{,}02$ (la suite étant décroissante, tous les termes suivants le sont aussi).

À la calculatrice (ou en exécutant le programme) :

$$u_{10} \approx 0{,}0249 > 0{,}02 \qquad \text{et} \qquad u_{11} \approx 0{,}0186 \leqslant 0{,}02.$$

La fonction `menace()` renvoie donc $\boxed{11}$.
Interprétation : c'est au début de l'année $2020 + 11 = 2031$ que la population passera pour la première fois sous le seuil de 20 individus : l'espèce sera menacée d'extinction **à partir de 2031**.