Limites de suites

Feuilles d'exercices et corrections

Mathématiques – Terminale – Enseignement de spécialité

Ce document regroupe l'ensemble des exercices du chapitre : opérations sur les limites, théorèmes de comparaison, puis exercices de type bac.

Feuille 1 – Opérations sur les limites

---

1 Limite d'une somme

Exercice 1: Limite d'une somme

Déterminer la limite des suites définies ci-dessous pour tout $n \geqslant 1$:

a) $u_n = n^2 + 2n + 5$

b) $u_n = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n} + 3$

c) $u_n = n^2 - 4n$

d) $u_n = -n^2 + \dfrac{1}{n^2} + 1000$

e) $u_n = n^3 - 5n^2 - 10n$

f) $u_n = \sqrt{n} - n$

2 Limite d'un produit

Exercice 2: Limite d'un produit

Déterminer la limite des suites définies ci-dessous pour tout $n \geqslant 1$:

a) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)\left(-3 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

b) $u_n = n^2\left(\dfrac{1}{n} - 6\right)$

c) $u_n = \dfrac{1}{n}\left(n^2 - 2n + 3\right)$

d) $u_n = \left(-1 + \dfrac{1}{n^5}\right)(-3n + 1)$

e) $u_n = -4n\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$

f) $u_n = \dfrac{5}{n}\left(\dfrac{3}{n^2} - \dfrac{2}{n}\right)$

3 Limite d'un quotient

Exercice 3: Limite d'un quotient

Déterminer la limite des suites définies ci-dessous pour tout $n \geqslant 1$:

a) $u_n = \dfrac{3}{n+1}$

b) $u_n = \dfrac{n^2+3}{\frac{1}{n} - 2}$

c) $u_n = \dfrac{2 - \frac{1}{n+3}}{5 + \frac{1}{n^2}}$

d) $u_n = \dfrac{n^2}{5n+2}$

e) $u_n = \dfrac{3n+6}{5-2n}$

f) $u_n = \dfrac{\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n}}{-\frac{3}{n}}$

Feuille 2 – Comparaison de suites

4 Comparaison de suites

Exercice 4: Comparaison de suites

Déterminer la limite éventuelle des suites suivantes, toutes définies sur $\mathbb{N}$ (sauf précision complémentaire) :

$u_n = 5n^2 + \sin(n)$

$v_n = -n^3 - \cos(n)$

$a_n = 2n^5 - (-1)^n$

$b_n = 2n + 3(-1)^n$

$e_n = 4 + \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$c_n = n^2 + (n+1)^7$

$d_n = -n^4 - e^{2n^2+1}$

$f_n = \dfrac{2 + 3\cos(n)}{n^3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$g_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{4n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$h_n = \dfrac{-4n + \cos(2n)}{3n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Feuille 3 – Exercices de type bac

5 Bac France métropolitaine 2022 (sujet 1)

Exercice 5: Annale de bac – France métropolitaine 2022, sujet 1

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1 de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}8$.
3. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
   c) Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.

b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

c) Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.
Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

6 Type bac Pondichéry 2017

Exercice 6: Exercice type bac – Pondichéry 2017

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$.
(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 2^n$.

1) Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur. Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	n	u(n)	v(n)
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16
7	5	99	32
8	6	196	64
9	7	389	128
10	8	774	256
11	9	1543	512
12	10	3080	1024
13	11	6153	2048
14	12	12296	4096
15	13	24587	8192

a) Quelles formules saisies dans les cellules B3 et C3, puis recopiées vers le bas, permettent d'obtenir les valeurs des suites (u_n) et (v_n) ?

b) Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

2) Étude de la suite (u_n)

a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

b) Déterminer la limite de la suite (u_n).

3) Étude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

a) Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir de l'indice 3.

b) On admet que, pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, on a : $0 < \dfrac{n}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

7 Bac Asie 2022

Exercice 7: Annale de bac – Asie 2022 (5 points)

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Soit n un entier naturel.
   Recopier et compléter la fonction `suite_u` d'argument `n` ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de u_n.

```
1  def suite_u(n) :
2      u = ...
3      for i in range(1,n+1) :
4          u = ...
5      return u
```

3. a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2n$.
   b) En déduire la limite de la suite (u_n).
   c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel n vérifiant $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?
4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
5. On considère la suite (v_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 2n + 1$.
   a) En dessous de la fonction `suite_u` précédente, on a écrit la fonction `suite_v` ci-dessous :

```
1  def suite_v(n):
2      L = []
3      for i in range(n+1) :
4          L.append(suite_u(i) - 2*i + 1)
5      return L
```

   La commande « L.append » permet de rajouter, en dernière position, un élément dans la liste L.
   Lorsqu'on saisit `suite_v(5)` dans la console, on obtient l'affichage suivant :

```
>>> suite_v(5)
[1, 5, 25, 125, 625, 3125]
```

   Conjecturer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n. Démontrer cette conjecture.
   b) En déduire, pour tout entier naturel n, la forme explicite de u_n en fonction de n.

8 Bac Amérique du Nord 2021

Exercice 8: Annale de bac – Amérique du Nord, mai 2021 (5 points)

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique. Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.
Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0{,}6 \\ u_{n+1} = 0{,}75\,u_n\,(1 - 0{,}15\,u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020 + n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par

$$f(x) = 0{,}75\,x(1 - 0{,}15\,x).$$

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$ et dresser son tableau de variations.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   c) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.
   a) Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.
   b) Le biologiste a programmé en langage Python la fonction `menace()` ci-dessous :

```
1  def menace():
2      u = 0.6
3      n = 0
4      while u > 0.02:
5          u = 0.75*u*(1-0.15*u)
6          n = n+1
7      return n
```

   Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction `menace()`. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.