Fiche de cours – Limites de suites

Mathématiques – Terminale – Enseignement de spécialité

L'essentiel à connaître

1 Définitions

Définition 1.1: Limites

— $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$: tout intervalle $]a\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite **à partir d'un certain rang**.

— $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$: tout intervalle $]-\infty\,;b[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

— $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$: tout intervalle **ouvert** contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. La suite est alors **convergente** ; sinon elle est **divergente**.

Attention : une suite divergente n'a pas forcément de limite infinie (exemple : $(-1)^n$ n'a pas de limite).

Propriété 1.2: Limites usuelles

$$\lim_{n\to+\infty} n = \lim_{n\to+\infty} n^2 = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

2 Opérations sur les limites

Somme

$\lim u_n$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n+v_n)$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Produit

$\lim u_n$	L	$L\neq 0$	∞	0
$\lim v_n$	L'	∞	∞	∞
$\lim u_n v_n$	LL'	∞	∞	**F.I.**

Quotient

$\lim u_n$	L	$L\neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim v_n$	$L'\neq 0$	0	∞	L'	∞	0
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{L}{L'}$	∞	0	∞	**F.I.**	**F.I.**

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$: le signe s'obtient par la **règle des signes**.

Méthode 2.1: Lever une forme indéterminée

Les quatre formes indéterminées : « $\infty-\infty$ », « $0\times\infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $\frac{0}{0}$ ».

— **Polynôme** : factoriser par le monôme de plus haut degré.
Ex. : $n^2-5n+1 = n^2\left(1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$.

— **Quotient** : factoriser numérateur *et* dénominateur par leur terme prépondérant, puis simplifier.
Ex. : $\dfrac{5n^2+4}{4n^2+3n} = \dfrac{5+\frac{4}{n^2}}{4+\frac{3}{n}}$.

— **Racines carrées** : multiplier et diviser par l'expression conjuguée.
Ex. : $\sqrt{n+2}-\sqrt{n} = \dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$.

— **Puissances** : factoriser par la puissance de plus grande base.
Ex. : $2^n-3^n = 3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right)$.

3 Comparaison et encadrement

Théorème 3.1: Théorèmes de comparaison

Si, **à partir d'un certain rang**, $u_n \leqslant v_n$:
— si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ *(démonstration au programme)* ;
— si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème 3.2: Théorème des gendarmes

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$.

Remarque : Quand les utiliser ?

Dès qu'apparaissent $\sin n$, $\cos n$ ou $(-1)^n$ (suites **sans limite**) : on les encadre par -1 et 1.
Exemple : $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\sin n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$, donc par les gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$.

4 Suites monotones, bornées

Définition 4.1: Suites majorées, minorées, bornées

(u_n) est **majorée** par M si $u_n \leqslant M$ pour tout n ; **minorée** par m si $u_n \geqslant m$ pour tout n ; **bornée** si elle est majorée et minorée. Pour le démontrer : souvent par **récurrence**.

Théorème 4.2: Convergence monotone (admis)

— Une suite **croissante et majorée** converge ; une suite **décroissante et minorée** converge.
— Une suite croissante convergeant vers L est majorée par L.
— Une suite **croissante non majorée** tend vers $+\infty$ *(démonstration au programme)* ; une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Attention : le théorème donne la convergence, pas la valeur de la limite (un majorant n'est pas forcément la limite).

Théorème 4.3: Théorème du point fixe (admis)

f est **continue** sur un intervalle I (courbe tracée sans lever le crayon), $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_n \in I$ pour tout n.
Si (u_n) **converge** vers $\ell \in I$, alors $f(\ell) = \ell$.

Méthode 4.4: Étudier une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par récurrence que la suite est monotone et bornée (par ex. $m \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant M$).
2. En déduire qu'elle converge (convergence monotone), et que $m \leqslant \ell \leqslant M$.
3. Résoudre $f(x) = x$ et garder la solution compatible avec l'encadrement : c'est ℓ.

Jamais de passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ sans avoir prouvé la convergence !

5 Suites géométriques

Propriété 5.1: Limite de (q^n)

q	$q \leqslant -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim q^n$	pas de limite	0	1	$+\infty$

— Si (u_n) est géométrique de raison q : $u_n = u_0 \times q^n$, et sa limite s'obtient à partir de celle de q^n et du signe de u_0.
— Cas $q > 1$: démonstration au programme, avec l'**inégalité de Bernoulli** $(1+a)^n \geqslant 1+na$ $(a > 0)$ et le théorème de comparaison.

Propriété 5.2: Somme des termes d'une suite géométrique

Pour $q \neq 1$: $\quad 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ (somme de $n + 1$ termes).

Bilan

— **Limite d'une expression explicite** : opérations sur les limites ; si forme indéterminée, factoriser / simplifier / conjuguée.
— **Présence de** sin**,** cos**,** $(-1)^n$: comparaison ou gendarmes.
— **Suite définie par récurrence** : récurrence → monotone et bornée → convergence monotone → point fixe ; ou bien suite auxiliaire géométrique → forme explicite → limite de q^n.