Travail de groupe

Suites numériques

Terminale spécialité mathématiques

Exercice 1: Métropole septembre 2026 Jour 1

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]-3\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{x+3}.$$

On admet que f est dérivable sur $]-3\ ;\ +\infty[$.

1. Vérifier, en détaillant les calculs, que pour tout réel x de $]-3\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{6}{(x+3)^2}$.

   En déduire que f est croissante sur $]-3\ ;\ +\infty[$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier n, on a : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
3. En déduire que (u_n) est convergente.

Partie B

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \neq 0$.
On note (v_n) et (w_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n} \quad \text{et} \quad w_n = v_n + 1.$$

1. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{3}{2}v_n + \dfrac{1}{2}$.
2. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera les paramètres.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{1}{2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}.$$

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. (a) Recopier et compléter le script suivant de telle sorte que la fonction `seuil()` renvoie le plus petit entier n tel que u_n soit inférieur ou égal à 10^{-3}.

```
1  def seuil():
2      n = 0
3      u = 1
4      while ...:
5          n = n + 1
6          u = ...
7      return ...
```

   (b) Quelle est la valeur renvoyée par la fonction `seuil()` ?

Exercice 2: Métropole 2026 Jour 1 (16 juin)

On étudie le fonctionnement d'un système de chauffage installé dans une pièce. Ce système se déclenche automatiquement dès que la température de la pièce est inférieure ou égale à 18 °C, et s'éteint lorsqu'elle atteint 20 °C.

Phase de refroidissement
Lorsque la pièce atteint la température de 20 °C, le système de chauffage s'éteint et la pièce refroidit.
On modélise la température de la pièce par la suite (u_n) définie par $u_0 = 20$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}965u_n + 0{,}35 + 0{,}07\,\mathrm{e}^{-0{,}1n},$$

où n est un nombre entier exprimant le temps écoulé en dizaines de minutes.

1. Montrer que $u_1 = 19{,}72$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 10$.
   On admet que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
   (a) Justifier que cette limite est solution de l'équation $x = 0{,}965x + 0{,}35$.
   (b) Déterminer ℓ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. On rappelle que le système de chauffage se met en marche automatiquement dès que la température de la pièce est inférieure ou égale à 18 °C.
   (a) Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 du programme écrit en langage Python ci-dessous, afin qu'il renvoie le nombre de dizaines de minutes à partir duquel le système de chauffage se remettra en marche.

```
1  def marche():
2      n = 0
3      u = 20
4      while ...:
5          u = ...
6          n = ...
7      return n
```

   (b) Déterminer le temps, en dizaines de minutes, à partir duquel le système de chauffage se remettra en marche.

Exercice 3: Métropole 2026 Jour 2 (17 juin)

Un bassin destiné à l'élevage des truites contient 30 000 litres d'eau, régulièrement renouvelée. Pour vérifier la présence éventuelle de substances polluantes dans le bassin, on procède à des analyses régulières.
On étudie un cas de contamination de l'eau par une substance polluante à l'aide d'un modèle discret.

On note V_n le volume, en litre, de la substance polluante présente dans le bassin, n heures après le début du phénomène de pollution. On a ainsi $V_0 = 0$.
On admet que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = 0{,}995V_n + 6$.

1. Calculer V_1 et V_2.

2. Recopier et compléter le programme ci-dessous pour qu'il renvoie le volume en litre de substance polluante présente dans le bassin après n heures.

```
def volume(n):
    v = ...
    for k in range(n):
        v = ...
    return v
```

3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant 1200$.
4. Justifier que la suite (V_n) converge, et calculer sa limite.