

Exercice Démonstration

Soient A un ensemble à $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ éléments et a un élément de A . On considère un entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$.

- 1) Combien existe-t-il de combinaisons de k éléments de A ?
- 2) Combien existe-t-il de combinaisons de k éléments de A qui contiennent l'élément a ?
- 3) Combien existe-t-il de combinaisons de k éléments de A qui ne contiennent pas l'élément a ?
- 4) En déduire la relation de Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
- 5) Démontrer cette relation en utilisant la formule : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Exercice histoire des mathématiques :

Lors de la Seconde Guerre mondiale, les Allemands utilisaient la machine Enigma pour s'envoyer des messages chiffrés incompréhensibles pour leurs opposants.

Cette machine chiffrait les informations en faisant passer un courant électrique à travers divers composants : en pressant une lettre sur le clavier, on faisait s'allumer une nouvelle lettre, qui était ajoutée au message codé. Le chiffrement d'Enigma était réputé inviolable, la machine nécessitant de nombreux réglages. Pour déchiffrer les messages interceptés, il fallait retrouver tous les réglages utilisés par les Allemands pour l'envoyer.

Pour ne rien arranger aux affaires des Alliés, ces réglages étaient modifiés chaque jour.

1. Le premier élément de la machine est une série de trois rotors qui permettent de réaliser les premières connexions électriques. Ces rotors sont choisis parmi cinq modèles et l'ordre de positionnement dans la machine est important. Combien de configuration différentes ces rotors permettent-ils ?
2. Chaque rotor peut être placé sur 26 positions différentes, correspondant aux 26 lettres de l'alphabet. Combien de positions différentes peut-on donner à l'ensemble des trois rotors choisis ?
3. La dernière étape consiste à réaliser un câblage sur un tableau de connexion. Vingt lettres sont reliées deux à deux et six restent inchangées.
 - a. Combien de manières différentes a-t-on de choisir six lettres inchangées parmi 26 ?
 - b. Les vingt lettres restantes sont alors reliées deux à deux par un câble. Pour le réaliser, on choisit deux lettres parmi les vingt que l'on relie, puis deux nouvelles lettres parmi les dix-huit restantes et ainsi de suite. L'ordre de sélection des câbles n'étant pas important, combien a-t-on de câblages possibles ?
4. En déduire un ordre de grandeur du nombre de réglages possibles de la machine Enigma.

*La machine Enigma est l'œuvre d'Arthur Scherbius, mort en 1929 avant de savoir quel usage l'armée allemande ferait de son invention. Le déchiffrement par les Alliés est l'œuvre de plusieurs milliers d'hommes et de femmes réunis à Bletchley Park qui se sont appuyés sur le travail des services de renseignement polonais. Le mathématicien **Alan Turing** (1912-1954) a contribué à cet effort de guerre en signalant l'importance des mots fréquemment utilisés dans les missives ennemies.*